

**МИНИСТЕРСТВО СТРОИТЕЛЬСТВА ПРЕДПРИЯТИЙ
НЕФТЯНОЙ И ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**



**Всесоюзный научно-исследовательский институт
по строительству магистральных трубопроводов**

рекомендации

**ПО РАСЧЕТУ ТРУБОПРОВОДОВ
ИЗ МНОГОСЛОЙНЫХ ТРУБ
НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ**

Р 451-82

МОСКВА 1982

МИНИСТЕРСТВО СТРОИТЕЛЬСТВА ПРЕДПРИЯТИЙ
НЕФТЯНОЙ И ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Всесоюзный научно-исследовательский институт
по строительству магистральных трубопроводов

·ВНИИСТ·



РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО РАСЧЕТУ ТРУБОПРОВОДОВ
ИЗ МНОГОСЛОЙНЫХ ТРУБ
НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

Р 451-82



МОСКВА 1982

УДК 621.643.001.3

"Рекомендации по расчету трубопроводов из многослойных труб на динамические нагрузки" разработаны лабораторией методов расчета трубопроводов и соединительных деталей ВНИИСТа совместно с отраслевой лабораторией прочности КТИРПХ при участии ВЦ КТИРПХ.

В них изложены расчетные модели, методы расчета, расчетные зависимости и алгоритмы вычисления частот свободных колебаний балочных элементов трубопроводов из многослойных труб, определяющие отличие поведения многослойных трубопроводов при динамических нагрузках от колебаний однослойных трубопроводов.

Рекомендации разработаны на основе теоретических исследований, экспериментальных измерений на лабораторных моделях и натуральных трубопроводах.

В разработке Рекомендаций принимали участие канд. техн. наук М.С.Герштейн и инженер С.С.Халюк.

Всесоюзный научно-исследовательский институт по строительству магистральных трубопроводов (ВНИИСТ)	Рекомендации	Р 45I-82
	по расчету трубопроводов из многослойных труб на динамические нагрузки	Разработаны впервые

I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Рекомендации по расчету содержат расчетные модели, основные уравнения, алгоритмы вычислений, расчетные и графические зависимости для определения частот и форм свободных колебаний балочных элементов трубопроводов из многослойных труб.

2. Рекомендации разработаны в развитие главы СНиП II-45-75 "Нормы проектирования. Магистральные трубопроводы".

3. Расчетные зависимости для балочного трубопровода из элементов многослойных и однослойных труб, основанные на модели длинной ортотропной конструктивно неоднородной оболочки, приведены в разделе 2. Для малых колебаний построены частотные зависимости, определены значения "пределной длины" трубопровода, выше которой можно определять наименьшую частоту собственных колебаний по "балочным" соотношениям.

Приведены амплитудно-частотные зависимости для нелинейных колебаний трубопровода, при которых балочная форма динамических перемещений связана с оваллизацией поперечного сечения.

4. В приложении рассмотрены примеры расчета амплитудно-частотных зависимостей нелинейных колебаний и таблицы.

5. Колебания элемента трубопровода, рассматриваемого как многослойная оболочка с однородными слоями, описаны в разделе 3. Приведены уравнения движения оболочки, методы и алгоритмы решения для линейных колебаний с малыми амплитудами и нелинейных колебаний с амплитудой порядка толщины оболочки. Даны гра-

Внесено лабораторией методов расчета трубопроводов и соединительных деталей ВНИИСТА	Утверждено Всесоюзным научно-исследовательским институтом по строительству магистральных трубопроводов 5 декабря 1981 г.	Срок введения I июля 1982 г.
---	---	---------------------------------

Фикси зависимостей частоты колебаний от числа окружных и продольных волн для оболочки с внутренним давлением и без него при различных соотношениях геометрических размеров, а также амплитудно-частотные характеристики нелинейных колебаний оболочек.

2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОЧНОГО КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРОДНОГО ТРУБОПРОВОДА

РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Многослойные трубы для магистральных трубопроводов состоят из спирально-свернутых обечаек, сваренных между собой кольцевыми швами. Расчетная схема такой конструктивно-неоднородной оболочки должна учитывать многослойность стенки, наличие регулярно расположенных по длине кольцевых подкреплений и отсутствие взаимного смещения слоев в местах подкреплений. Возможны и различные конструктивные решения многослойных труб.

На рис.1 представлена труба, состоящая из l обечаек с числом слоев, равным p .

Приведенная цилиндрическая жесткость такой трубы может быть найдена по следующей зависимости:

$$D_{пр} = \left[D_1 \frac{a+2b}{l} + D_0 \left(1 - \frac{a+2b}{l} \right) \right] \frac{l}{L} + D_1 \left(1 - \frac{l}{L} \right), \quad (1)$$

где D_0 - цилиндрическая жесткость оболочки, лишенной связей сдвига;

D_1 - цилиндрическая жесткость сплошной оболочки, толщина которой равна сумме толщин слоев. Они определяются соотношениями:

$$D_0 = \rho \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad (2)$$

$$D_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \sum_{i=1}^p Z_i^2,$$

где Z_i - расстояния от срединных поверхностей отдельных слоев до срединной поверхности оболочки в целом.

Параметр ρ определяется по следующей формуле:

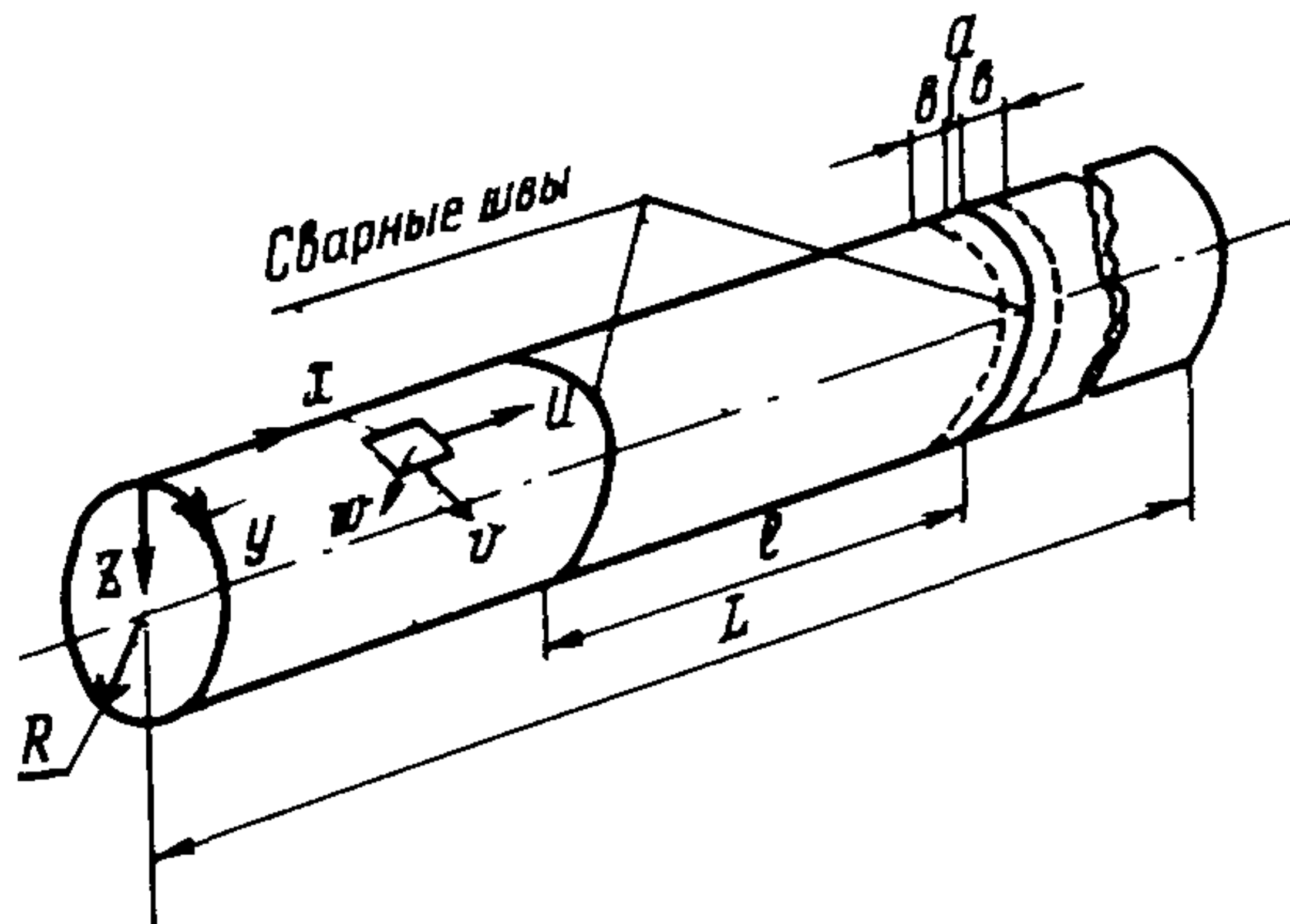


Рис. I. Схема многослойной трубы:

L - длина трубы; h - толщина одного слоя; a - ширина сварного шва; δ - ширина участка, примыкающего к сварному шву и работающего как сплошное кольцо; l - длина обечайки

$$\delta = K \sqrt{R h}. \quad (3)$$

Коэффициент K принимает значения 1,5-2 в зависимости от типа применяемого материала, состояния его поверхности, плотности навивки, имеющихся подкрепляющих сварных швов.

При вычислениях $D_{пр}$ была сделана ориентация на промышленный образец многослойной трубы и значение коэффициента K было принято равным 1,9.

Значения приведенной цилиндрической жесткости для некоторых конструктивных вариантов труб представлены в табл. I. Число секций для всех вариантов равно 7.

2.2. При составлении уравнений движения использованы безразмерные величины

$$\{x, y, u, v, w\} = \frac{1}{R} \{x, y, u, v, w\}, \quad t = \frac{t}{R} \left[\frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \right], \quad (4)$$

где x направлена по образующей, y - по дуге окружности.

Таблица I

Характеристика трубы			$\delta,$ см	$D_{пр},$ кгс·см
$h,$ мм	ρ	Наличие однослой- ных сек- ций		
4,1	4	Нет	9,17	$1,7 \cdot 10^5$
4,6	5	Нет	9,71	$4,4 \cdot 10^5$
6,0	5	Нет	11,10	$10,56 \cdot 10^5$
5,5	6	Нет	10,60	$12,77 \cdot 10^5$
2,0	4	Нет	6,4	$0,17 \cdot 10^5$
4,1	4	Две крайние	9,17	$3,48 \cdot 10^5$

Основные допущения полубезмоментной теории оболочек сводятся к следующему:

1) относительное удлинение ϵ_y профиля поперечного сечения оболочки и относительный сдвиг ϵ_{xy} в срединной поверхности малы по сравнению с производными перемещений, или

$$\frac{\partial v}{\partial y} + w^s = \epsilon_y \approx 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon_{xy} \approx 0; \quad (5)$$

2) в соотношениях упругости можно не учитывать часть удлинения ϵ_x , связанную с усилиями T_y , и часть момента M_y , связанную с параметром χ_x . Это означает принятие соотношений упругости в упрощенном виде:

$$\begin{aligned} M_x &= \mu D_{пр} \chi_y, \\ T_x &= E H \epsilon_x, \quad (H = \rho h), \\ M_y &= D_{пр} \chi_y; \end{aligned} \quad (6)$$

3) во всех уравнениях равновесия, кроме уравнения моментов относительно касательной к координатным линиям y , можно пренебречь усилием Q_x и моментами M_x и M_{xy} .

С учетом принятых допущений уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - Q_y \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y} - \rho H \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R_y^*} Q_y - \rho H \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{T_y}{R_y^*} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q - \rho H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned}$$

Входящий в уравнение радиус кривизны деформированной средней поверхности R_y^* определяется следующей зависимостью:

$$\frac{1}{R_y^*} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\partial v^*}{\partial y} \right), \quad v^* = \frac{\partial w}{\partial y} - v, \quad (8)$$

где v^* - угол поворота касательной к средней линии контура поперечного сечения.

Уравнения движения (7) после преобразования и подстановки зависимостей усилий от перемещений приводят к одному уравнению в перемещениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ \left. + C^2 \left[\left(\frac{\partial^3 v^*}{\partial y^3} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} \frac{\partial^4 v^*}{\partial y^4} + \frac{\partial^5 v^*}{\partial y^5} \right] + C^2 \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial^3 v^*}{\partial x \partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + C^2 \frac{\partial^3 v^*}{\partial y^3} - K_q \frac{\partial^3 v^*}{\partial y^3} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь
$$C^2 = \frac{D_{пр}}{R^2 E H}, \quad K_q = \frac{q R}{E H}. \quad (10)$$

2.3. Колебания трубопровода при малых перемещениях.

Для получения уравнения движения, описывающего малые колебания трубопровода, необходимо в (9) исключить нелинейные члены. Линеаризованное таким образом уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + C^2 \left(\frac{\partial^5 v^*}{\partial y^5} + \frac{\partial^3 v^*}{\partial y^3} \right) - K_q \frac{\partial^3 v^*}{\partial y^3} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + w - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (11)$$

Принята следующая аппроксимация нормальной составляющей перемещения точки срединной поверхности трубы:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{iny} \sin(\omega t). \quad (I2)$$

Остальные составляющие примут вид:

$$U = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x) e^{iny} \sin(\omega t),$$

$$V = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{in} f_n'(x) e^{iny} \sin(\omega t), \quad (I3)$$

$$V^* = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{n^2-1}{in} f_n(x) e^{iny} \sin(\omega t)$$

(Здесь и далее штрихами и римскими цифрами обозначены производные функции $f_n(x)$ по продольной координате x).

Подставив выражения (I3) в (II), после преобразований получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{n^2} f_n''(x) + n^2(n^2-1)(c^2 n^2 - c^2 + K_q) f_n(x) - \omega_*^2 \frac{1}{n^2} f_n''(x) - (n^2+1) f_n(x) = 0. \quad (I4)$$

Граничные условия на концах трубы, соответствующие шарнирному опиранию, имеют вид:

$$\text{при } x=0, x=L, \quad V = W = T_x = 0. \quad (I5)$$

Функция $f_n(x)$ задана в виде ряда:

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,n} \sin \lambda x. \quad (I6)$$

$$\text{Здесь и ранее: } \lambda = \frac{m\pi R}{L}, \quad \omega_*^2 = \frac{\omega^2 R^2 \rho (1-\mu^2)}{E}.$$

С учетом (I6) уравнение (I5) принимает вид:

$$\lambda^4 + n^2(n^2-1)(c^2 n^2 - c^2 + K_q) = \omega_*^2 [\lambda^2 + n^2(n^2+1)]. \quad (I7)$$

Решив (I7) относительно ω_*^2 , получим расчетную формулу для квадрата собственной частоты замкнутой цилиндрической

конструктивно-неоднородной оболочки с шарнирным опиранием концов. Формула учитывает влияние внутреннего давления (при внешнем давлении знак при коэффициенте K_q изменяется на минус).

$$\omega_*^2 = \frac{\lambda^4 + n^4(n^2 - 1)[c^2(n^2 - 1) + K_q]}{\lambda^2 + n^2 + n^4}. \quad (18)$$

Увеличение жесткости трубы приводит, с одной стороны, к возрастанию абсолютных значений собственных частот, с другой — к перераспределению $(\omega_*)_{\min}$ относительно форм колебаний. В связи с этим используется понятие предельной длины трубопровода в виде параметра $L_* = L_{np} / R$, где L_{np} — длина трубы, соответствующая равенству собственных частот при колебаниях по формам с одной и двумя окружными волнами.

Приравняв значения собственных частот (18) при $n = 1$ и $n = 2$ и полагая $\lambda^2 \approx 0$, получим

$$L_* = \frac{L_{np}}{R} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}} \left(1 - \frac{K_q}{3c^2}\right)^{-1/4} \quad (19)$$

Отсюда, при $K_q = 0$ (труба, не загруженная давлением) имеем

$$L_* = \frac{\pi}{2\sqrt{c}} \quad (20)$$

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ТРУБЫ (НЕЛИЧЕЙНАЯ ЗАДАЧА)

2.4. Изгибным свободным колебаниям трубы даже при небольших амплитудах сопутствуют колебания, вызывающие изменение геометрии поперечного сечения (овализацию), т.е. характеризующиеся числом окружных волн $n = 2$. Частота этих наложенных колебаний в два раза превышает основную частоту. Это явление описывается геометрически нелинейной полубезмоментной теорией оболочек. Уравнение движения принимается в виде (9).

Введем двучленную аппроксимацию нормальной составляющей полного перемещения точки срединной поверхности трубы

$$w^t = f_1 \sin \lambda x \cos y + f_2 \sin \lambda x \cos 2y, \quad (21)$$

где f_1, f_2 - функции времени.

Второе слагаемое выражения (21) представляет собой наложенную составляющую прогиба (результат овализации).

Решение принимается в виде:

$$f_1 = A \cos \omega_* t, \quad f_2 = -B \cos^2 \omega_* t. \quad (22)$$

Использование для интегрирования уравнений движения метода Бубнова-Галеркина приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} -\omega_*^2 + a_1 - \frac{3}{4} a_2 B &= 0, \\ (\omega_*^2 - \frac{3}{4} b_1) B + \frac{3}{4} b_2 A &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Из второго уравнения следует соотношение между амплитудами прогиба A и овализации B

$$B = - \frac{0,75 b_2 A^2}{\omega_*^2 - 0,75 b_1}. \quad (24)$$

Подставив (24) в первое уравнение (23), приходим к уравнению второй степени относительно квадрата частоты

$$\omega_*^4 - (a_1 + \frac{3}{4} b_1) \omega_*^2 + \frac{3}{4} a_1 b_1 - \frac{9}{16} a_2 b_2 A^2 = 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda^4}{2 + \lambda^2}, & a_2 &= \frac{5\lambda^4}{3\pi(2 + \lambda^2)}, \\ b_1 &= \frac{\lambda^4 + 144c^2 + 48Kq}{20 + \lambda^2}, & b_2 &= \frac{64c^4}{3\pi(20 + \lambda^2)} \end{aligned} \quad (26)$$

Последний член полученного уравнения учитывает связанность форм колебаний при конечных перемещениях точек трубы.

Окончательная расчетная формула для квадрата частоты

$$\omega_*^2 = \frac{(a_1 + \frac{3}{4} b_1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_1 + \frac{3}{4} b_1)^2}{4} - \frac{3}{4} a_1 b_1 + \frac{9}{16} a_2 b_2 A^2} \quad (27)$$

В частном случае при $B = 0$ из первого уравнения системы (23) получаем выражение для квадрата наименьшей собственной частоты трубы с недеформируемым контуром поперечного сечения

(т.е. при колебаниях по балочной форме)

$$\omega_*^2 = \frac{\lambda^4}{2 + \lambda^2} \quad (28)$$

3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТРУБОПРОВОДА

КОЛЕБАНИЯ С МАЛЫМИ АМПЛИТУДАМИ

3.1. В качестве многослойного элемента трубопровода рассматривается одна многослойная обечайка в виде круговой цилиндрической оболочки конечной длины, состоящей из чередующихся слоев одинаковой толщины (рис.2). При рассмотрении колебаний допускается не учитывать конструкцию наклеста концов наружного и внутреннего слоев. Число слоев обозначается буквой ρ , толщина слоя оболочки - h , толщина "шва" - межслоевого зазора - h_m (рис.3).

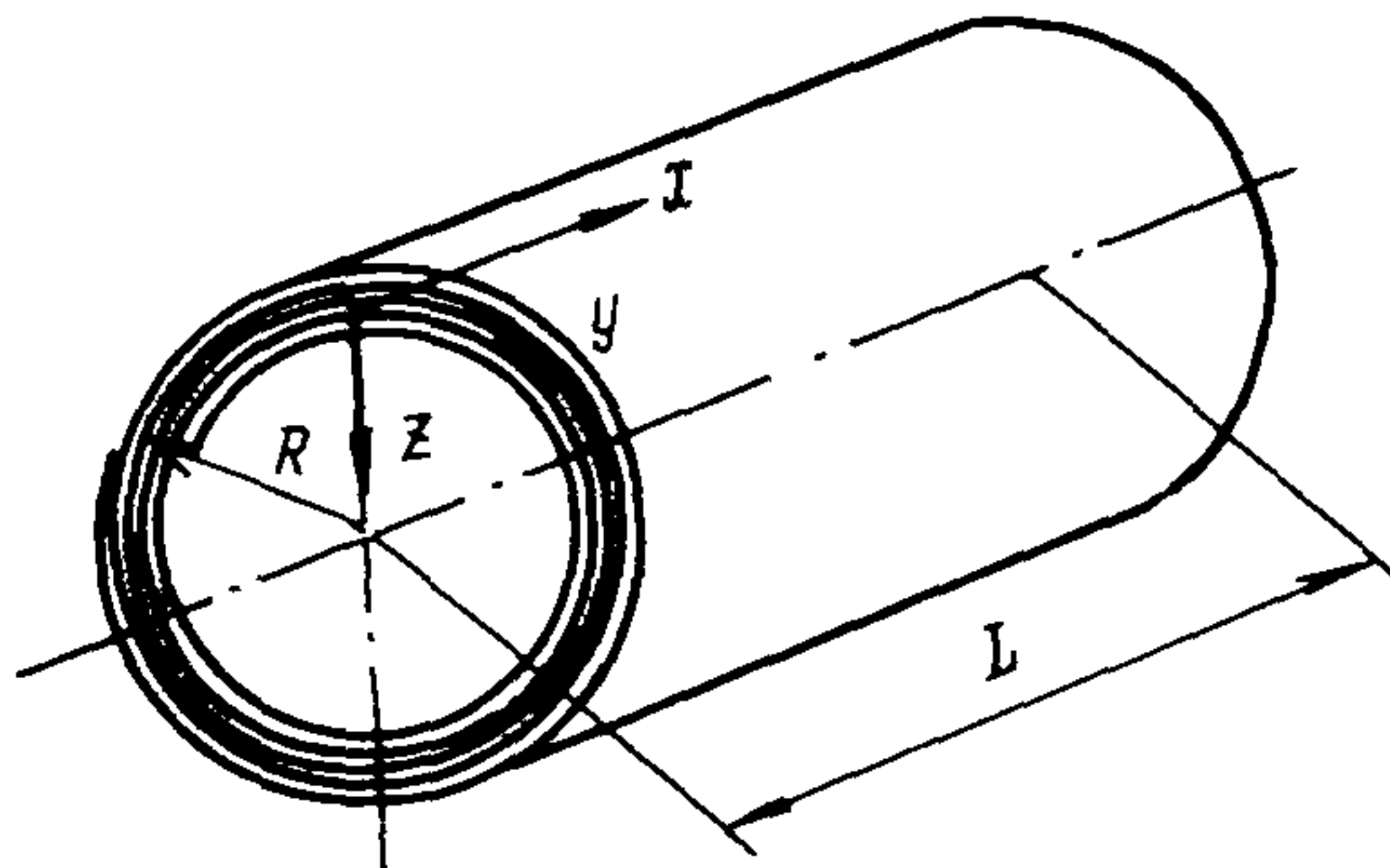


Рис.2. Многослойная рулонированная обечайка

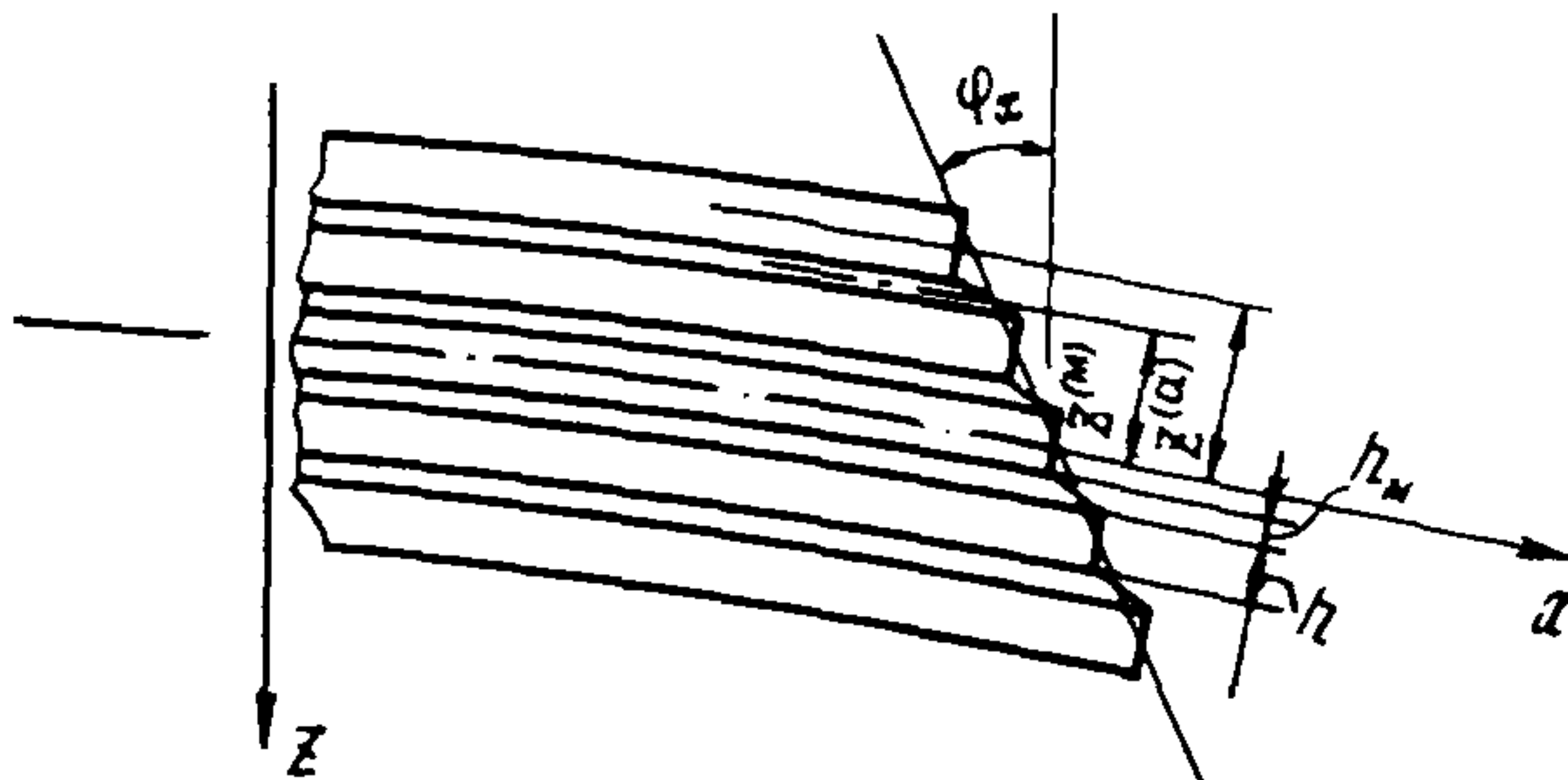


Рис.3. Элемент многослойной оболочки в процессе деформирования

Модуль упругости материала слоя - E , коэффициент Пуассона материала слоя - μ , жесткость "шва" на сдвиг - G . Радиус средней поверхности оболочки - R , длина - L .

Величина h_m принимается равной удвоенной высоте микронеровностей R_z на шероховатой поверхности исходного материала слоев. Для первого класса чистоты $R_z = 320$ мкм. Соответственно $h_m = 0,6$ мм. Сдвиговая жесткость G определяется по формуле

$$G = \frac{h_m}{K_z}, \quad (29)$$

где K_z - коэффициент контактной податливости, мкм·см²/кгс.

Для слоев трубы диаметром 1420 мм принимается $K_z = 0,2$ мкм·см²/кгс. Отсюда $G = 3000$ кгс/см². В практических расчетах приведенную жесткость можно принимать по данным эксперимента.

3.2. Линейные уравнения движения.

При рассмотрении задачи о свободных колебаниях круговой цилиндрической оболочки с малыми перемещениями используется линеаризованный вариант уравнений движения. Для каждого слоя принята гипотеза Кирхгофа-Лява.

Координата L отсчитывается в средней поверхности

вдоль образующей, координата y - в окружном направлении,
 Z - по нормали к срединной поверхности к центру кривизны.
 Через u, v, w обозначены составляющие перемещений в на-
 правлениях x, y, z , через φ_x, φ_y - углы поворота нор-
 мали в плоскостях xz, yz . Положительные направления усилий
 в срединной поверхности T_x, T_y, T_{xy} , поперечных усилий
 Q_x, Q_y и моментов $M_x, M_y, M_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}$ показаны
 на рис.4.

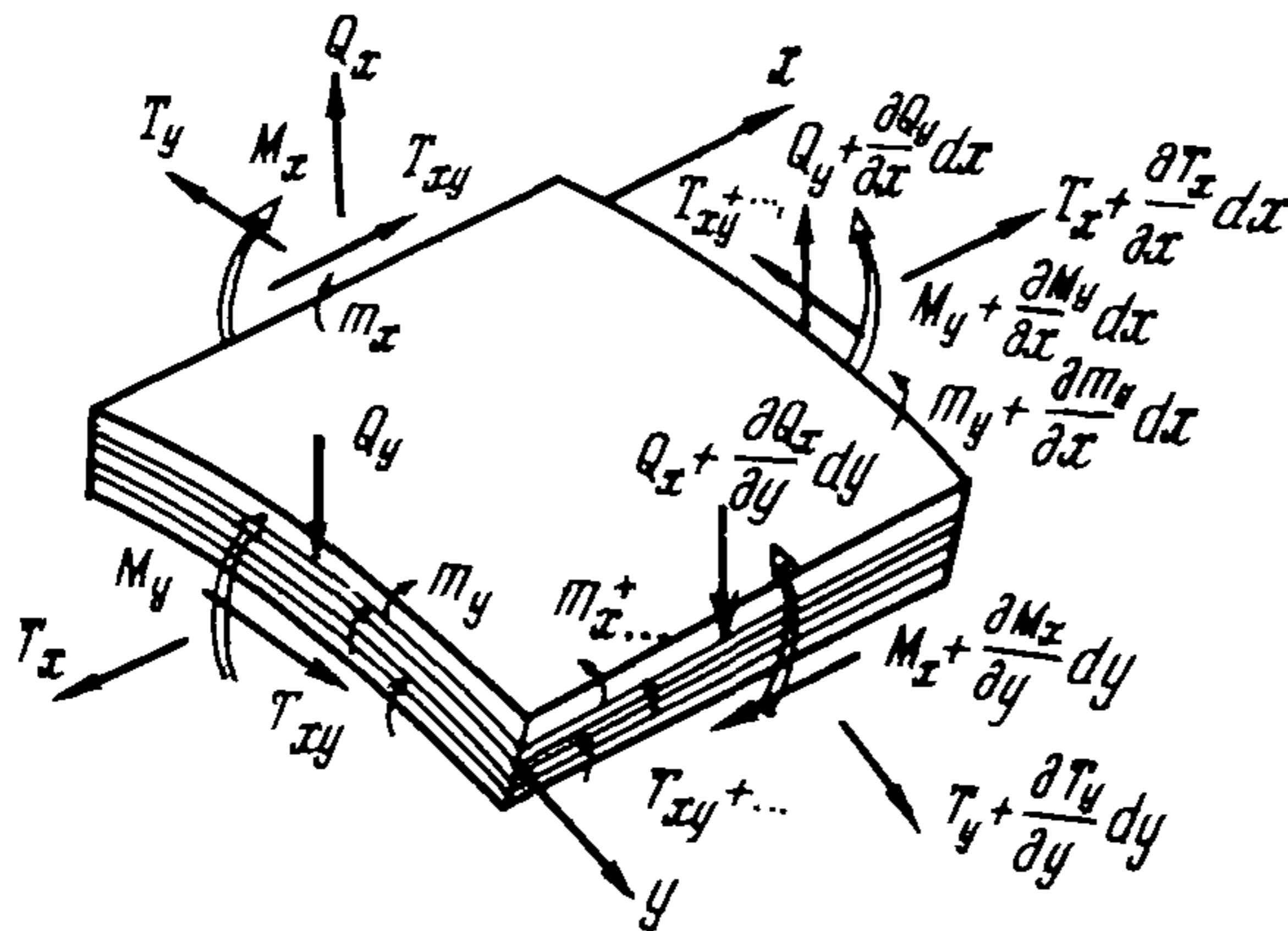


Рис.4. Положительные направления усилий и моментов многослойной оболочки

Уравнения движения в усилиях имеют вид:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} - \rho r h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R} Q_y - \rho r h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{T_y}{R} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + q - \\ - \rho r h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - q_x - \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - q_y - \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $\eta_2 = \rho h \sum_{i=1}^p z_i^2$, q - внутреннее давление;

ρ - плотность материала слоев;

z_i - расстояние от средней поверхности оболочки в целом до средней поверхности i -го слоя.

Усилия связаны с перемещениями зависимости вида

$$T_x = B \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) \right],$$

$$T_y = B \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

$$T_{xy} = B \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$M_x = D_1 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right),$$

$$M_y = D_1 \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right),$$

$$M_{xy} = D_1 \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right),$$

$$\begin{aligned}
m_x &= -D_0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \\
m_y &= -D_0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \\
m_{xy} &= -D_0 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \\
Q_x &= \frac{1}{1-s} k^2 \rho h_m G \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x \right) = k^2 G h \rho \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \varphi_x \right), \\
Q_y &= \frac{1}{1-s} k^2 \rho h_m G \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \varphi_y \right). \quad (31)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B &= \rho \frac{Eh}{1-\mu^2}, & D_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \sum_{i=1}^p \beta_i^2, \\
D_0 &= \rho \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, & s &= \frac{h}{h+h_m}. \quad (32)
\end{aligned}$$

Подстановка зависимостей (30) в уравнения (31) приводит к уравнениям движения в перемещениях:

$$\begin{aligned}
B \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - B \frac{\mu}{R} \frac{\partial W}{\partial x} - \eta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\
B \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - \frac{C}{R^2} v - \frac{B+C}{R} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{C}{R} \varphi_y - \eta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
C \nabla^2 W - D_0 \nabla^4 W - \frac{B}{R^2} W + B \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B+C}{R} \frac{\partial W}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \right. & \\
\left. + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \tau_{x_0} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \tau_{y_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - \eta_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0, \\
C \frac{\partial W}{\partial x} - D_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \varphi_x + \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} &= 0, \\
C \frac{\partial W}{\partial y} - D_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{C}{R} v + C \varphi_y + \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} &= 0. \quad (33)
\end{aligned}$$

Здесь

$$C = k^2 \delta H,$$

$$\eta_1 = \rho r h.$$

3.3. Метод и алгоритм решения.

Граничные условия на краях для скрученной оболочки длиной L принимаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = L, \quad \dot{U} = \dot{W} = \varphi_y = M_x = 0, \\ T_x = T_{x_0}, \quad T_y = T_{y_0}, \end{aligned} \quad (34)$$

где T_{x_0} - сжимающие (или растягивающие) усилия, равномерно приложенные к торцам оболочки;

T_{y_0} - окружные усилия от действия внутреннего давления.

Решения для форм колебания, удовлетворяющие принятым граничным условиям, имеют вид:

$$\begin{aligned} U &= U_0 \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R} e^{i\omega t}, \\ V &= V_0 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} e^{i\omega t}, \\ W &= W_0 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R} e^{i\omega t}, \\ \varphi_x &= \Phi \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R} e^{i\omega t}, \\ \varphi_y &= \Psi \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь m - число продольных полуволн;

n - число волн в окружном направлении;

ω - частота колебаний.

Подстановка выражений (35) в уравнения движения (33) приводит к системе пяти линейных алгебраических однородных уравнений, которую можно представить в виде

$$(\bar{A} - \omega^2 \bar{E}) \bar{U} = 0, \quad (36)$$

где \bar{E} - единичная матрица;

\bar{U} - вектор-столбец амплитудных значений динамических перемещений (U, V, W) и углов поворота (φ_x, φ_y) ;

\bar{A} - симметричная матрица упругих коэффициентов, зависящих от геометрических и механических характеристик оболочки. Элементы матрицы \bar{A} вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{\rho}{H} \left[\left(\frac{m\pi}{e} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \pi^2 \right], \\
 a_{12} &= \frac{\rho(1+\mu)m\pi n}{2He}, \\
 a_{13} &= \rho \frac{\mu m\pi}{He}, \quad a_{14} = a_{15} = 0, \\
 a_{22} &= \frac{\rho}{H} \pi^2 + \rho \frac{1-\mu}{2He} m^2 \pi^2, \\
 a_{23} &= \frac{D+\rho}{H} \pi, \\
 a_{24} &= 0, \quad a_{25} = \frac{D}{\sqrt{H}} \xi, \\
 a_{33} &= \frac{\rho}{12Hz^2} \left(\frac{m\pi}{e} \right)^4 + \frac{\rho}{6H} \left(\frac{m\pi n}{ez} \right)^2 + \frac{\rho}{12Hz^2} \pi^4 + \\
 &\quad + \frac{D+T_{x_0}}{H} \left(\frac{m\pi}{e} \right)^2 + \frac{D+T_{y_0}}{H} \pi^2 + \frac{\rho+T_{y_0}}{H}, \\
 a_{34} &= \frac{D}{\sqrt{H}} \xi \frac{m\pi}{e}, \quad a_{35} = \frac{D}{\sqrt{H}} \xi \pi, \\
 a_{44} &= \left(\frac{m\pi}{e} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \pi^2 + D\xi^2, \\
 a_{45} &= \frac{1+\mu}{2} \frac{m\pi n}{e}, \\
 a_{55} &= \pi^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{m\pi}{e} \right)^2 + D\xi^2,
 \end{aligned} \tag{37}$$

где
$$D = \frac{HG(1-\mu^2)}{Eh(1-\delta)}$$

Кроме того, введены безразмерные параметры:

$$\varrho = \frac{L}{R}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{h}, \quad z = \frac{R}{h}, \quad \xi^2 = \frac{R^2}{\sum_{i=1}^p Z_i^2},$$

$$\omega_* = \omega R \sqrt{\frac{\rho(1-\mu^2)}{E}}, \quad \tilde{T}_x = \frac{T_x}{Eh}(1-\mu^2), \quad \tilde{T}_y = \frac{T_y}{Eh}(1-\mu^2). \quad (38)$$

Волнистые линии над обозначениями безразмерных величин в (37) опущены.

Однородная система линейных алгебраических уравнений (36) имеет ненулевое решение при условии равенства нулю ее определителя

$$\det(\bar{A} - \omega_*^2 \bar{E}) = 0. \quad (39)$$

Из этого уравнения находятся квадраты частот свободных колебаний, являющиеся собственными числами матрицы \bar{A} . Таким образом, задача свелась к определению собственных чисел и собственных векторов матрицы пятого порядка \bar{A} , элементы которой определяются выражениями (37).

3.4. Частоты и формы колебаний.

Расчеты выполнены по стандартной программе, реализующей метод вращений, для машин единой системы ЭВМ. Геометрические и физические параметры оболочек варьировались в пределах: R/h — от 10 до 500, L/R — от 0,5 до 50, число слоев ρ — от 2 до 10, отношение сдвиговой жесткости швов G к модулю упругости слоев E — от 0 до 0,5. Величина δ принимала значения 0,67 и 0,95. Число полуволн в продольном направлении изменялось от 0 до 12, число окружных волн π — от 1 до 13.

Проведены вычисления без учета внешних нагрузок и при действии сжимающих равномерно распределенных по окружности усилий, а также внутреннего давления.

Расчеты дают пять значений ω_* , соответствующих поперечным, тангенциальным и сдвиговым колебаниям. Результаты представлены в виде таблиц, содержащих все значения ω_* для произвольного сочетания π и π . Порядок расположения ω_* в столбцах следующий (снизу вверх): поперечные, тангенциальные, сдвиговые.

Примеры вычислений приведены в табл.2 (приложение). В шапке каждого примера указаны значения R/H (обозначено RH); L/R ; G , кгс/см⁴; число слоев P (обозначено A); k_m , см (НМ); H_2 , см; ρ , кгс·с²/см⁴; μ ; E , кгс/см²; T_x (ТХ0); T_y (ТУ0).

КОЛЕБАНИЯ С АМПЛИТУДАМИ ПОПЕРЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПОРЯДКА ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ

3.5. Колебания элемента трубопровода в виде многослойной оболочки с амплитудами поперечных перемещений порядка толщины описываются нелинейными уравнениями движения. Нелинейные уравнения в перемещениях имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & C \nabla^2 W - D_0 \nabla^4 W + \frac{C}{BR(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{C}{R^2} W - \frac{C}{2R} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \\
 & + C \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + L(W, F) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \gamma_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \\
 & D_1 L(\varphi_x, \varphi_y) - C \varphi_x - C \frac{\partial W}{\partial x} - \gamma_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0, \\
 & D_1 L(\varphi_y, \varphi_x) - C \varphi_y - C \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{C}{R} W - \gamma_2 \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} = 0, \\
 & \frac{1}{B(1-\mu^2)} \nabla^4 F = L(W, W) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (40)
 \end{aligned}$$

где F - функция усилий в срединной поверхности, определяемая соотношениями

$$T_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (41)$$

В уравнениях (40) введены следующие дифференциальные операторы:

$$L(W, F) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

$$L(\varphi_x, \varphi_y) = \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y}, \quad (x=y),$$

$$L(w, w) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (42)$$

Общие выражения для радиального прогиба и углов поворота должны удовлетворять условиям периодичности, которые можно записать в виде

$$w^*(x, y, t) = w^*(x, y + 2\pi R, t),$$

$$\frac{\partial^k w}{\partial y^k}(x, y, t) = \frac{\partial^k w}{\partial y^k}(x, y + 2\pi R, t), \quad (k=1, 2, 3, 4),$$

$$v(x, y, t) = v(x, y + 2\pi R, t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y, t) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y + 2\pi R, t). \quad (43)$$

Из последнего условия следует

$$\oint \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0.$$

3.6. Метод и алгоритм решения.

Функции прогиба и углов поворота нормали к срединной поверхности принимаются в виде

$$w^*(x, y, t) = f_1 \sin \lambda x \cos n y - f_0 \sin^2 \lambda x,$$

$$\varphi_x(x, y, t) = \Phi_1 \cos \lambda x \cos n y - \Phi_0 \sin 2\lambda x, \quad (44)$$

$$\varphi_y(x, y, t) = \Psi_1 \sin \lambda x \sin n y,$$

где $f_1, f_0, \Phi_1, \Phi_0, \Psi_1$ - функции времени;
 λ - параметр волнообразования, равный $\lambda = \frac{\pi R}{L}$.

Условие малости окружной деформации срединной поверхности

$$\int_0^{2\pi R} \varepsilon_y dy \approx 0$$

приводит к зависимости для f_0 и Φ_0 , подстановка которых в (44) дает следующие выражения для аппроксимирующих функций:

$$\begin{aligned}
W &= f_1 \sin \lambda_x \cos n y - \frac{\pi^2}{4} f_1^2 \sin^2 \lambda_x, \\
\varphi_x &= \phi_1 \cos \lambda_x \cos n y - \frac{\pi^2}{4} \phi_1^2 \sin 2 \lambda_x, \\
\varphi_y &= \psi_1 \sin \lambda_x \sin n y.
\end{aligned} \tag{45}$$

После подстановки (45) в уравнение неразрывности деформаций - четвертое уравнение (40) - интегрированием находится выражение для функции усилий. Затем применение метода Бубнова - Галеркина к первым трем уравнениям (40) дает обыкновенные дифференциальные уравнения относительно амплитуд поперечных перемещений f_1 и углов поворота нормали к срединной поверхности ϕ_1, ψ_1

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \Omega^2 f_1 + 2\alpha f_1 \left[\left(\frac{df_1}{dt} \right)^2 + f_1 \frac{d^2 f_1}{dt^2} \right] + \delta f_1^3 + g f_1^5 + a_1 \phi_1 + a_2 \psi_1 &= 0, \\
\frac{d^2 \phi_1}{dt^2} + \nu_1^2 \phi_1 + 2\nu_2^2 \phi_1 \left[\left(\frac{d\phi_1}{dt} \right)^2 + \phi_1 \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} \right] + \nu_3^2 f_1 - \nu_4^2 \psi_1 &= 0, \\
\frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \xi_1 \psi_1 - \xi_3 f_1 - \xi_4 \phi_1 - \xi_5 f_1^3 &= 0.
\end{aligned} \tag{46}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Omega^2 &= \frac{1}{\zeta_1} \left[\frac{D_0}{R^2} \gamma^2 + C\gamma + \frac{C\lambda^2(\lambda^2 - \mu n^2) + \tilde{B}\lambda^4}{\gamma^2} - C \right], \\
\alpha &= \frac{3}{16} n^4, \quad g = \frac{3\tilde{B}\lambda^4 n^8}{16\zeta_1} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{6^2} \right), \\
\delta &= \frac{1}{\zeta_1} \left[\frac{D_0}{R^2} \lambda^4 n^4 - \frac{Cn^4(1-\lambda^2)}{4} + \frac{\tilde{B}\lambda^4}{16} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{C\lambda^2 n^4 (\lambda^2 - \mu n^2) - 4\tilde{B}\lambda^4 n^4}{4\gamma^2} \right], \quad \zeta_1 = \frac{\rho h E}{(1-\mu^2)}, \\
\nu_1^2 &= \frac{D_1}{\zeta_2} \left(\lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 \right) + \frac{C}{\zeta_2} R^2, \quad \nu_2^2 = \frac{n^4}{4}, \quad \nu_3^2 = \frac{C\lambda}{\zeta_2} R^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_4 = \xi_4 &= \frac{D_1(1+\mu)}{2\zeta_2} \lambda n, \quad \xi_1 = \frac{D_1}{\zeta_2} \left(n^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 \right) + \frac{C}{\zeta_2} R^2, \\ \xi_3 &= \frac{C}{\zeta_2} \left(n + \frac{\lambda^4 - \mu \lambda^2 n^2}{n \gamma^2} - \frac{1}{n} \right), \\ \xi_5 &= \frac{C \lambda^2 n^3 (\lambda^2 - \mu n^2) R^2}{4 \gamma^2 \zeta_2}, \quad \zeta_2 = \frac{hE}{1-\mu^2} \sum_{i=1}^p z_i^2. \end{aligned} \quad (47)$$

При анализе гармонических нелинейных колебаний решение (46) принято в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= A \cos \omega t, \\ \phi_1 &= B \cos \omega t, \\ \psi_1 &= C \cos \omega t. \end{aligned} \quad (48)$$

Подстановка этого решения в уравнения движения (46) и применение метода Бубнова-Галеркина приводит систему к виду

$$\begin{aligned} (-\omega_*^2 + \Omega^2)A - \alpha \omega_*^2 A^3 + \frac{3}{4} \delta A^3 + \frac{5}{8} g A^5 + a_1 B - a_2 C &= 0, \\ (-\omega_*^2 + \mathcal{U}_1)B - \mathcal{U}_2 \omega_*^2 B^3 + \mathcal{U}_3 A - \mathcal{U}_4 C &= 0, \\ (-\omega_*^2 + \xi_1)C - \xi_3 A - \xi_4 B - \frac{3}{4} \xi_5 A^3 &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Приравнивание нулю матрицы, составленной из коэффициентов, при амплитудах A, B, C приводит к частотному уравнению, которое может быть представлено в виде многочлена третьего порядка относительно квадрата частоты ω_*^2 с коэффициентами, нелинейно зависящими от амплитуды перемещений,

$$\omega_*^6 - K_1 \omega_*^4 + K_2 \omega_*^2 - K_3 = 0. \quad (50)$$

Коэффициенты $K_1 - K_3$ связаны с (47) следующими соотношениями:

$$K_1 = a_3 + \frac{\Omega^2 + \frac{3}{4} \delta A^2 + \frac{5}{8} g A^4}{1 + \alpha A^2},$$

$$K_2 = a_4 + \frac{a_3 \Omega^2 + a_1 v_3^2 + a_2 \xi_3 + \frac{3}{4} (a_3 \delta - a_2 \xi_5) A^2 + \frac{5}{8} a_3 g A^4}{1 + \alpha A^2},$$

$$K_3 = \frac{1}{1 + \alpha A^2} \left[a_4 \Omega^2 - a_1 a_5 - a_2 a_6 + \frac{3}{4} (a_4 \delta + a_1 \xi_5 v_4^2 - a_2 \xi_5 v_1^2) A^2 + \frac{5}{8} a_4 g A^4 \right],$$

кроме того,

$$\begin{aligned} a_3 &= v_1^2 + \xi_1, & a_4 &= v_1^2 \xi_1 - v_4^2 \xi_4, \\ a_5 &= v_3^2 \xi_1 - v_4^2 \xi_3, & a_6 &= v_1^2 \xi_3 - v_3^2 \xi_4. \end{aligned} \quad (51)$$

Наименьший корень уравнения, соответствующий поперечным колебаниям, можно найти по формуле

$$(\omega_*^2)_{\text{нел}} = \tilde{\omega}_*^2 = \frac{K_3}{K_2} + \left(\frac{K_3}{K_2} \right)^2 \frac{K_1}{K_2}. \quad (52)$$

Если пренебречь в (49) нелинейными членами, будет найдена частота ω_* линейных колебаний с малыми амплитудами. Уравнение скелетной кривой, характеризующей амплитудно-частотную зависимость для нелинейных колебаний, будет представлено в виде

$$\nu = \tilde{\omega}_* / \omega_*. \quad (53)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример расчета I

Выполнить расчет и анализ частот собственных колебаний трубопроводов при двух вариантах конструкций многослойных труб.

Вариант I. Труба состоит из 7 четырехслойных обечаяек.

Вариант 2. 5 четырехслойных и две однослойные обечайки (той же толщины) установлены по концам.

Диаметр труб — 1420 мм, суммарная толщина 16,4 мм.

Результаты вычислений нижней части спектра собственных частот труб при различных значениях отношения длины трубопровода к радиусу поперечного сечения ($L/R = 5, 10, 25, 50, 100$) представлены на рис. 5 и 6 в виде зависимостей частоты от числа волн n в окружном направлении. Волновой параметр m был принят равным единице, так как именно этому его значению отвечают наименьшие собственные частоты. Величины приведенной ци-

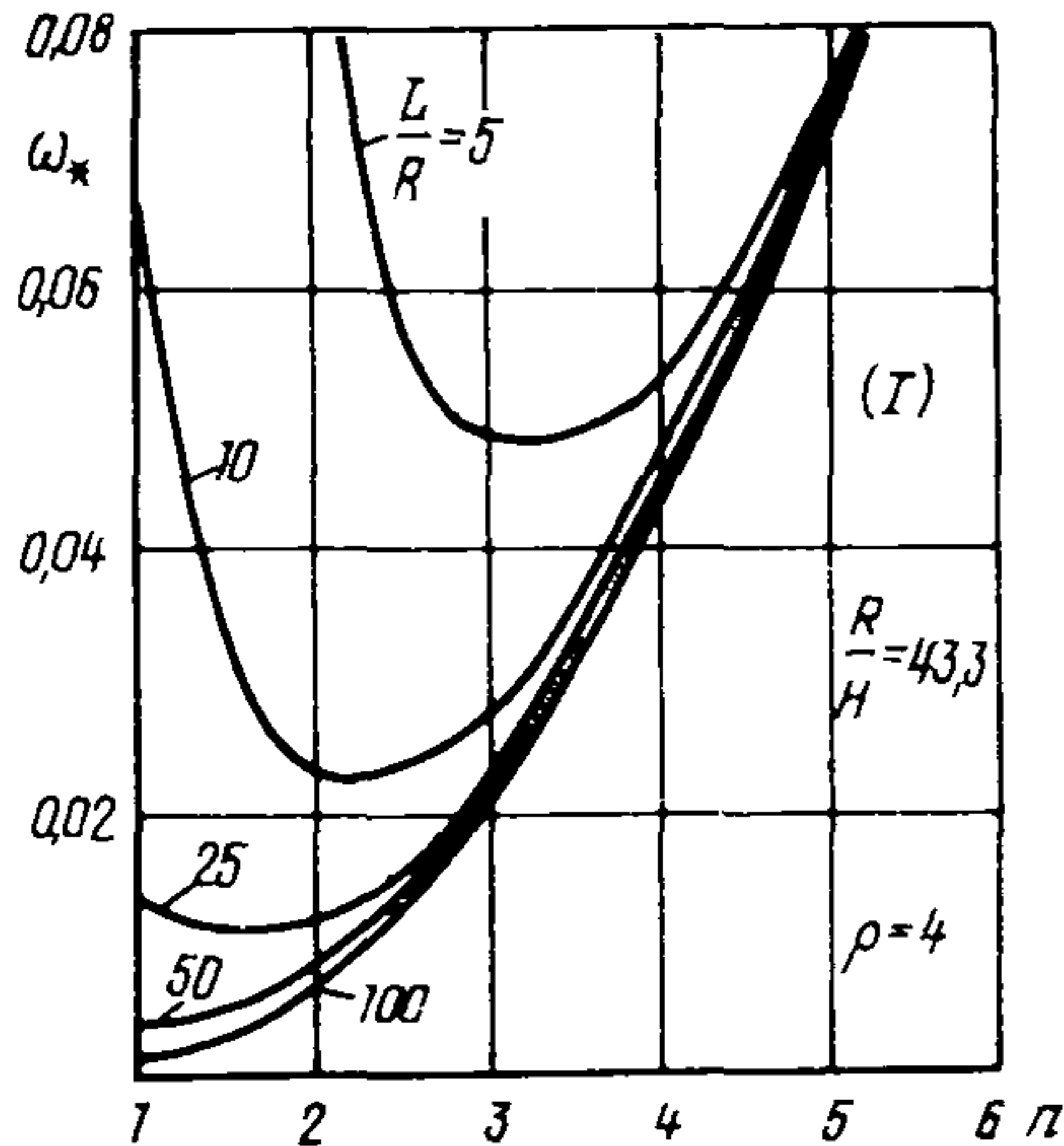


Рис. 5. Частотные кривые трубопровода I-го конструктивного варианта

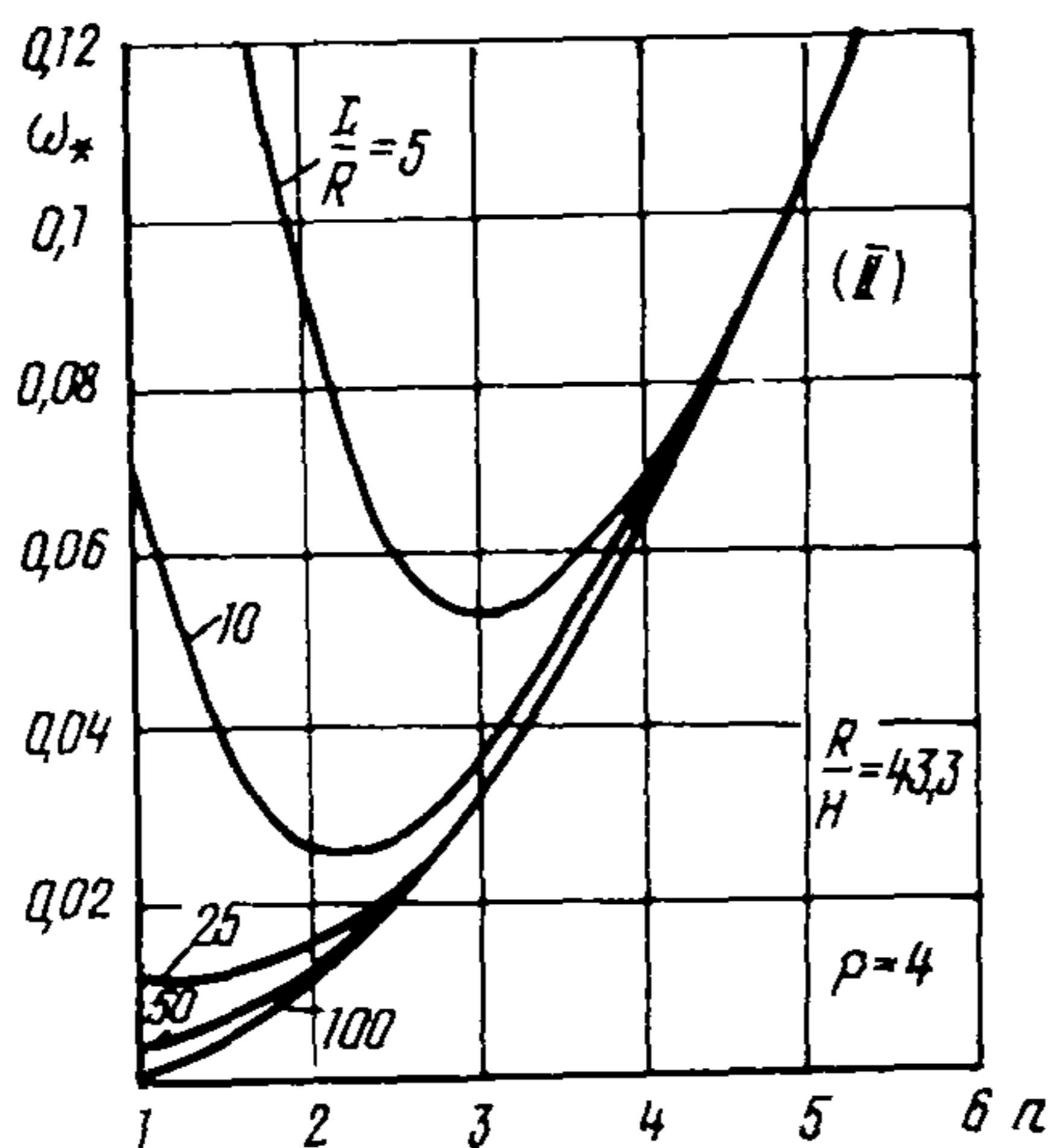


Рис.6. Частотные кривые трубопровода 2-го конструктивного варианта

цилиндрической жесткости D_{np} , соответствующие обоим вариантам, найденные по формулам (1)–(3), равны соответственно $1,7 \cdot 10^5$ и $3,48 \cdot 10^5$ кгс·см.

Приведенные графики свидетельствуют о том, что наименьшая собственная частота трубы не всегда соответствует наиболее простой балочной форме колебания. При определенном значении геометрических или жесткостных параметров минимум $\omega_{1,n}$ смещается в сторону более сложных форм. Так, например, для трубы варианта I при $L/R = 5$ наименьшая собственная частота соответствует трем волнам в окружном направлении, при $L/R = 10, 25$ – двум, а при $L/R = 50$ и выше – одной.

На рис.7,8 выполнено графическое определение предельной длины. Для труб вариантов I и 2 она оказалась равной 28 и 23 соответственно.

Значения предельной длины, подсчитанные по формуле (20), равны 28,09 и 23,6. Результаты совпадают.

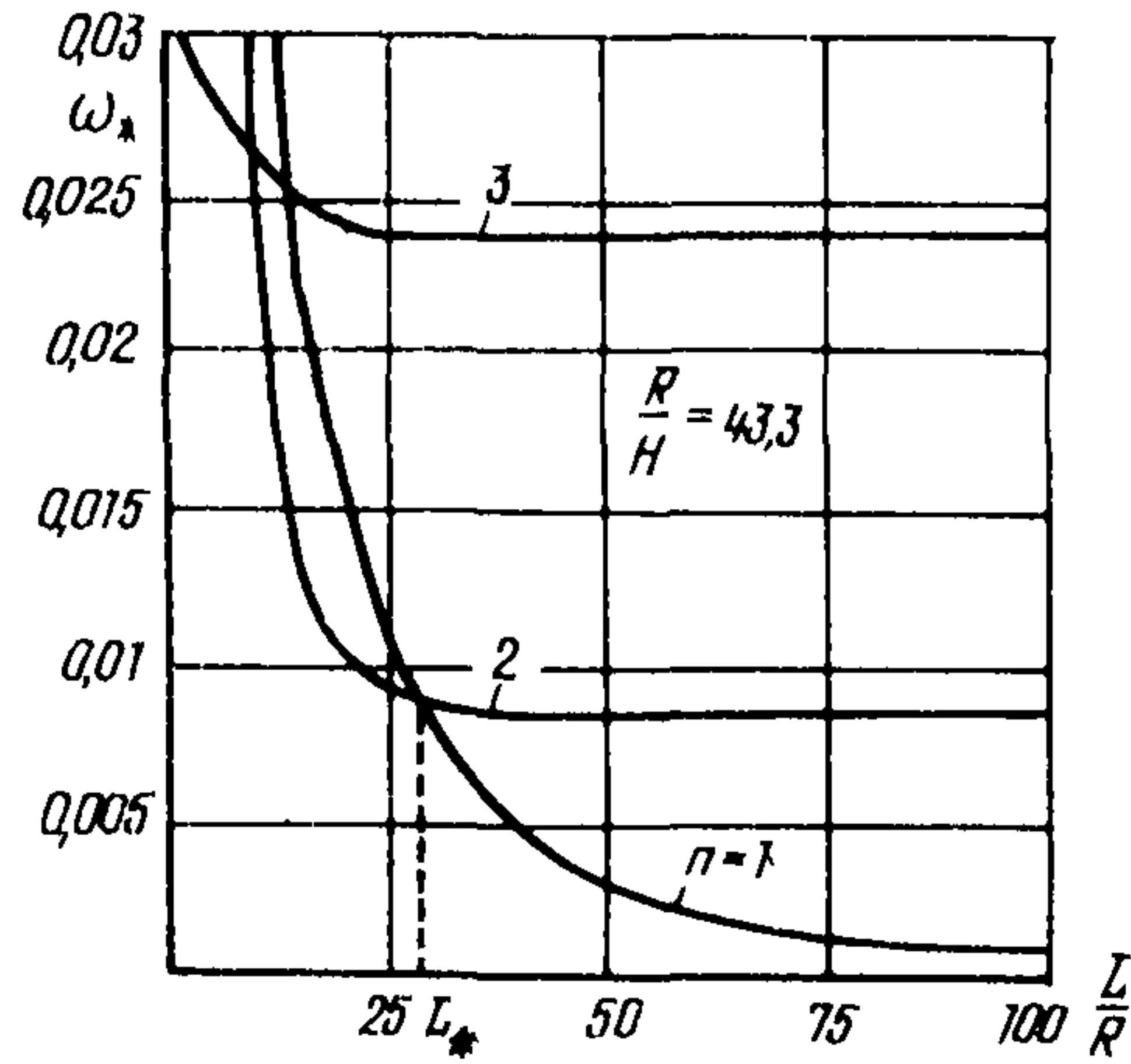


Рис.7. Зависимость низшей частоты от длины трубопровода I-го конструктивного варианта

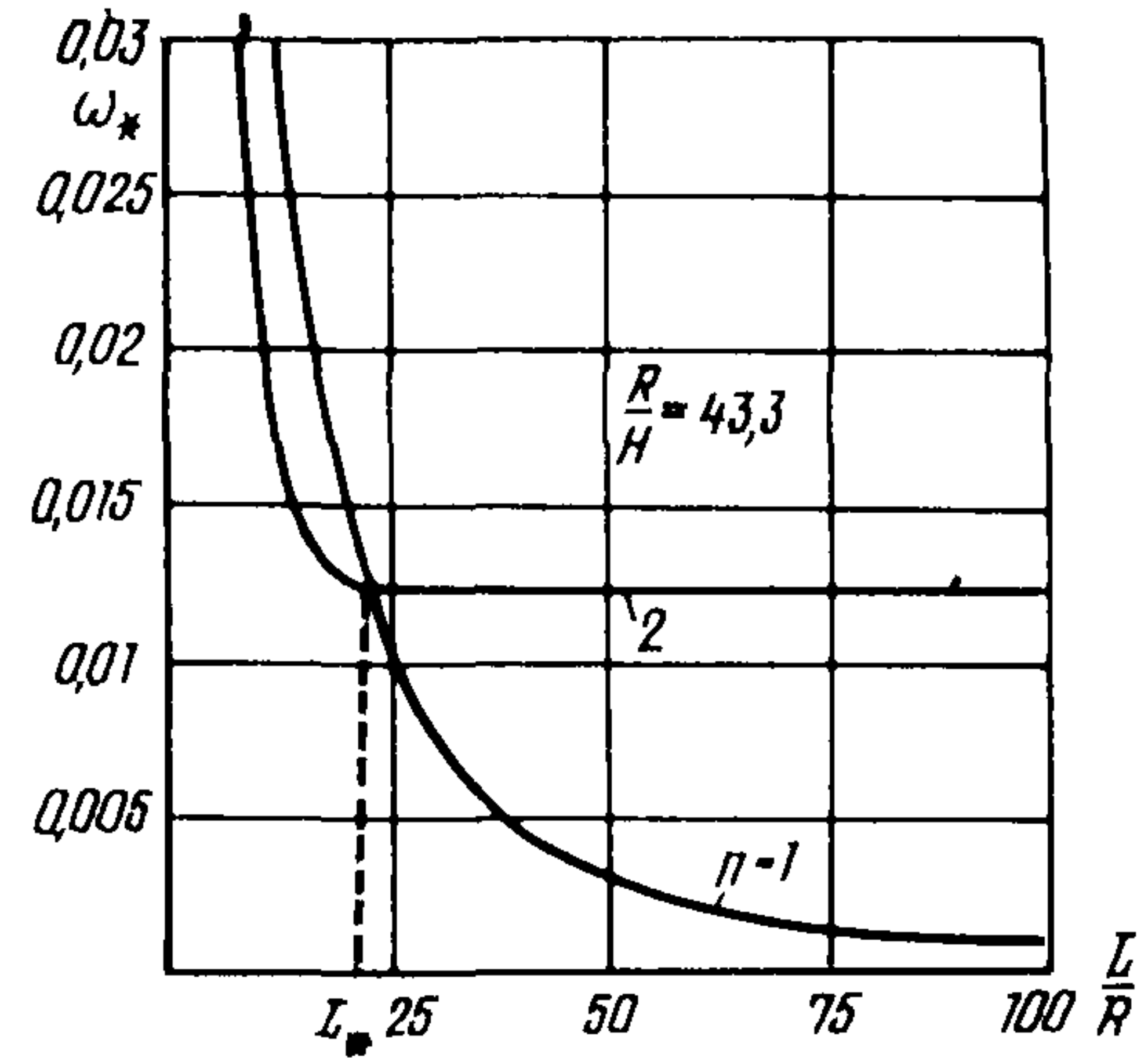


Рис.8. Зависимость низшей частоты от длины трубопровода 2-го конструктивного варианта

На рис.9 показана зависимость предельной длины от параметра приведенной жесткости (10).

По формуле (19) были получены значения предельных длин труб, находящихся под действием внутреннего давления. Результаты расчетов отражены на рис.10, из которого следует, что предельная длина при наличии давления резко уменьшается. При этом, чем тоньше труба, тем влияние внутреннего давления существенней.

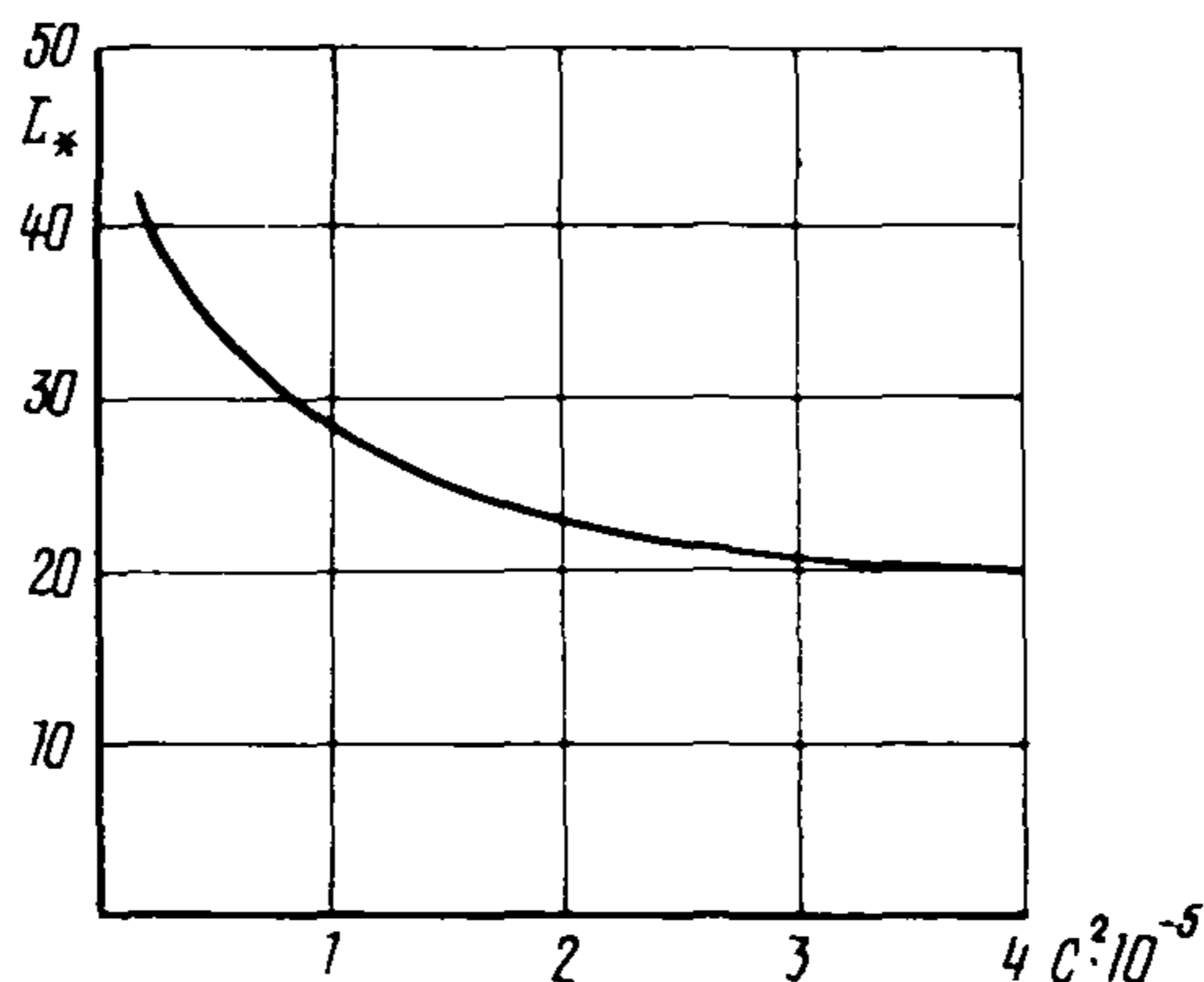


Рис.9. Зависимость предельной длины от параметра приведенной жесткости

Выполненный анализ распределения минимальных собственных частот конструктивно-неоднородных многослойных труб позволяет сделать некоторые выводы.

Минимальные частоты не всегда соответствуют наиболее простой балочной форме колебаний. При определенных соотношениях геометрических и жесткостных характеристик это могут быть колебания с $n = 2, 3$.

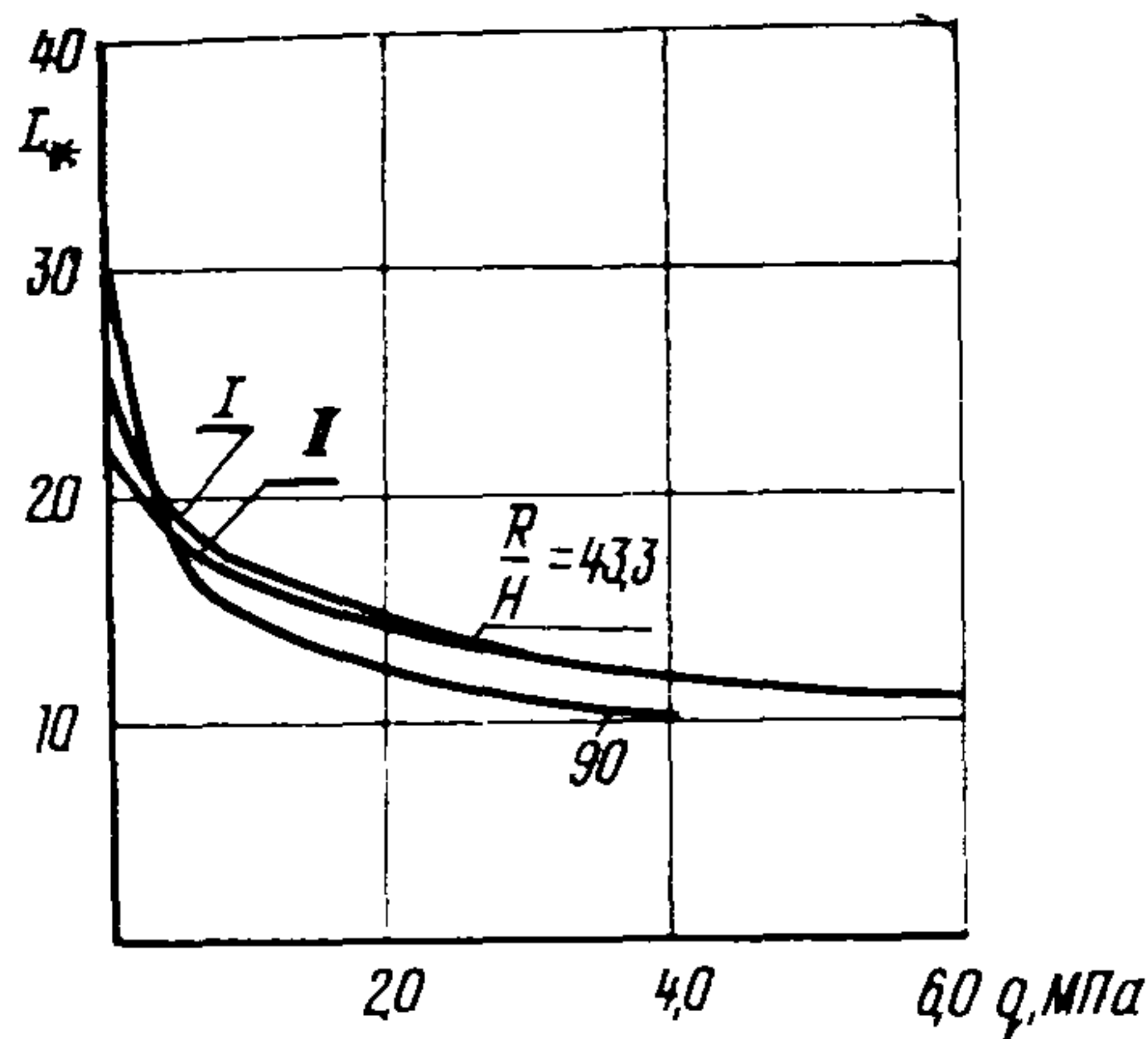


Рис.10. Зависимость предельной длины от величины внутреннего давления

Пример расчета 2

Вычислить частоты связанных колебаний (при $m = 1$, $n = 1$ и 2) четырехслойной трубы II конструктивного варианта (см. пример I) с размерами: диаметр 1420 мм, толщина 16,4 мм при значениях параметра длины $L/R = 10-80$.

Основные результаты расчетов представлены на рис.11. Как следует из рис.11, учет овализации при рассмотрении колебаний трубопровода по форме с одной полуволной в пролете приводит к некоторому снижению частоты по сравнению со значением, найденным по линейному расчету во всем диапазоне длин. График имеет точку перегиба, правее которой частоты соответствуют преимущественно изгибным колебаниям с овализацией, а левее – преимущественно овализационным колебаниям с наложенным изгибом. Эта точка определяет на горизонтальной координатной оси значение предельной длины трубопровода. Из графика видно, что с увеличением амплитуды колебания предельная длина уменьшается. Наибольшее отличие результатов расчета по линейной и нелинейной

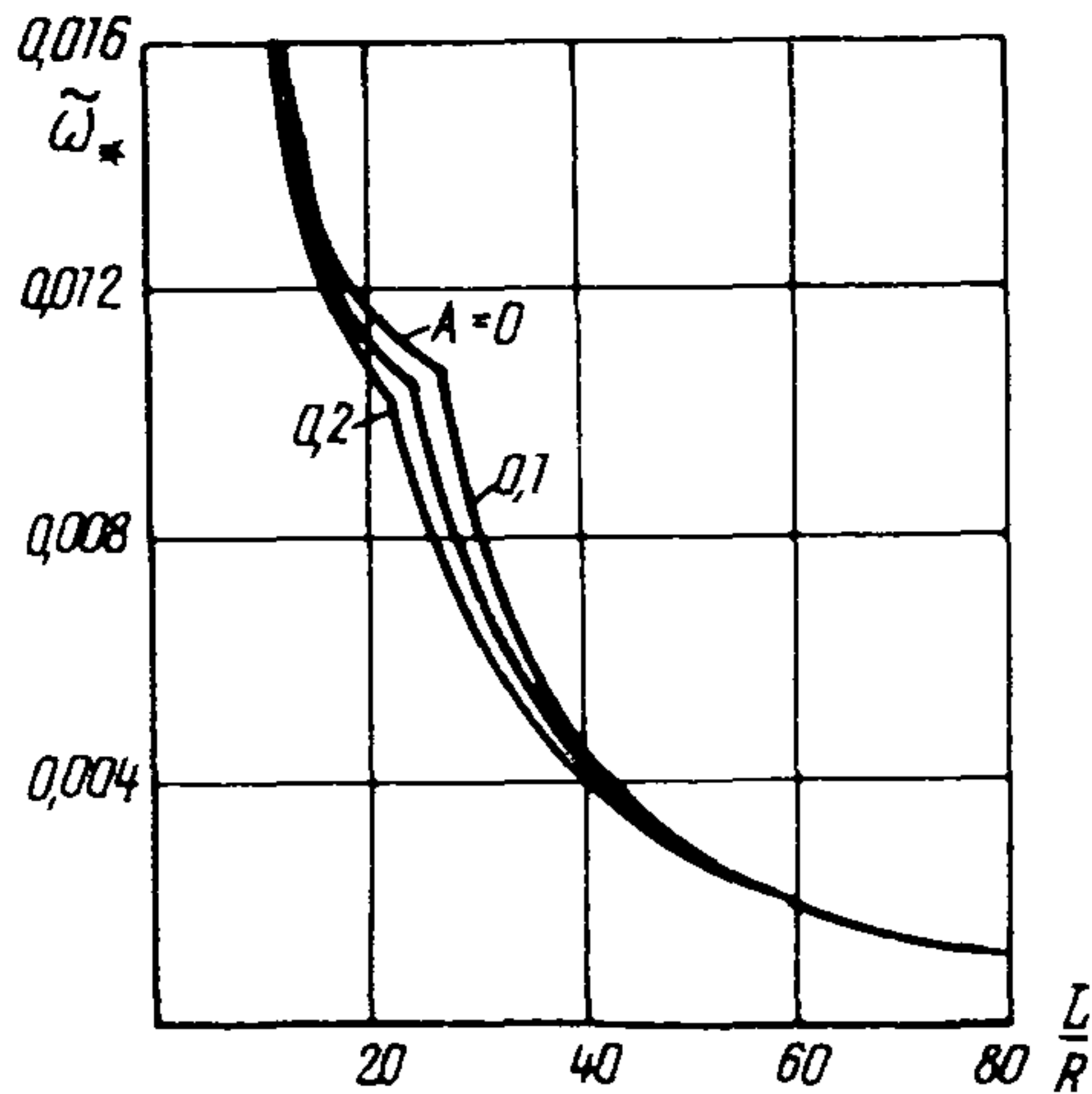


Рис.11. Зависимость нижней частоты колебаний от относительной длины пролета

(с учетом связанности форм) теории наблюдается для труб с длиной, близкой к предельной (~ 25).

На рис.12 представлены амплитудно-частотные зависимости нелинейных связанных колебаний рассматриваемой составной трубы. По вертикальной оси отложена безразмерная амплитуда нормального перемещения.

Как следует из рис.12, наибольшая нелинейность наблюдается у трубы с параметрами $L/R = 25$. Это объясняется совпадением этого параметра с величиной предельной длины трубы при полученном значении приведенной жесткости.

Влияние $D_{пр}$ на собственные частоты нелинейных колебаний отражено на рис.13. Расчетные точки графика соответствуют значениям коэффициента нелинейности $\nu = \tilde{\omega}_*/\omega_*$, полученным при величине безразмерной амплитуды, равной $\tilde{A} = AR^2/L^2$, для длин труб, равных предельным для каждого значения приведенной жесткости.

Таким образом, по данным выполненного анализа результатов нелинейного расчета можно сделать вывод о том, что

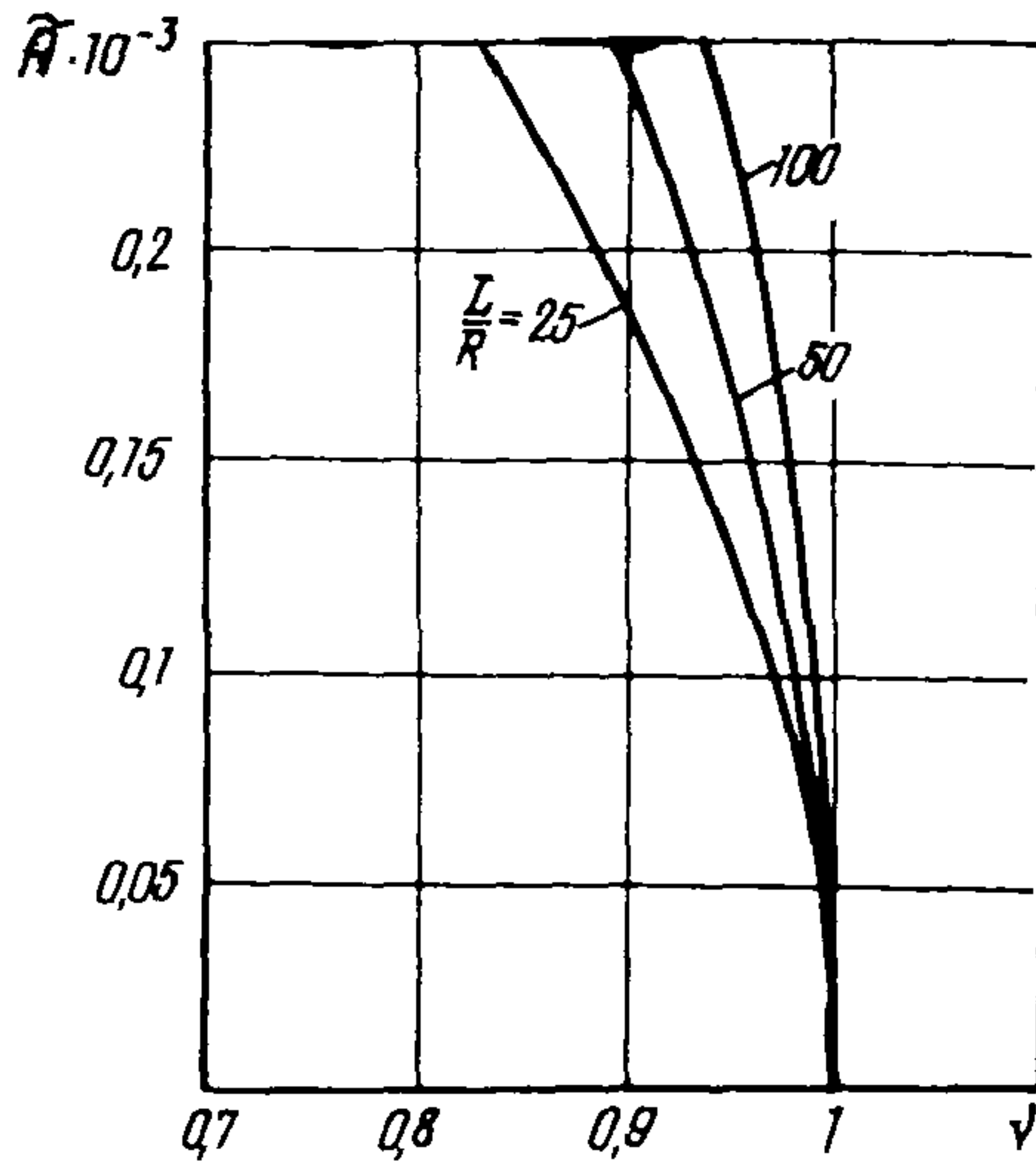


Рис.12. Амплитудно-частотные зависимости для нелинейных связанных колебаний трубы

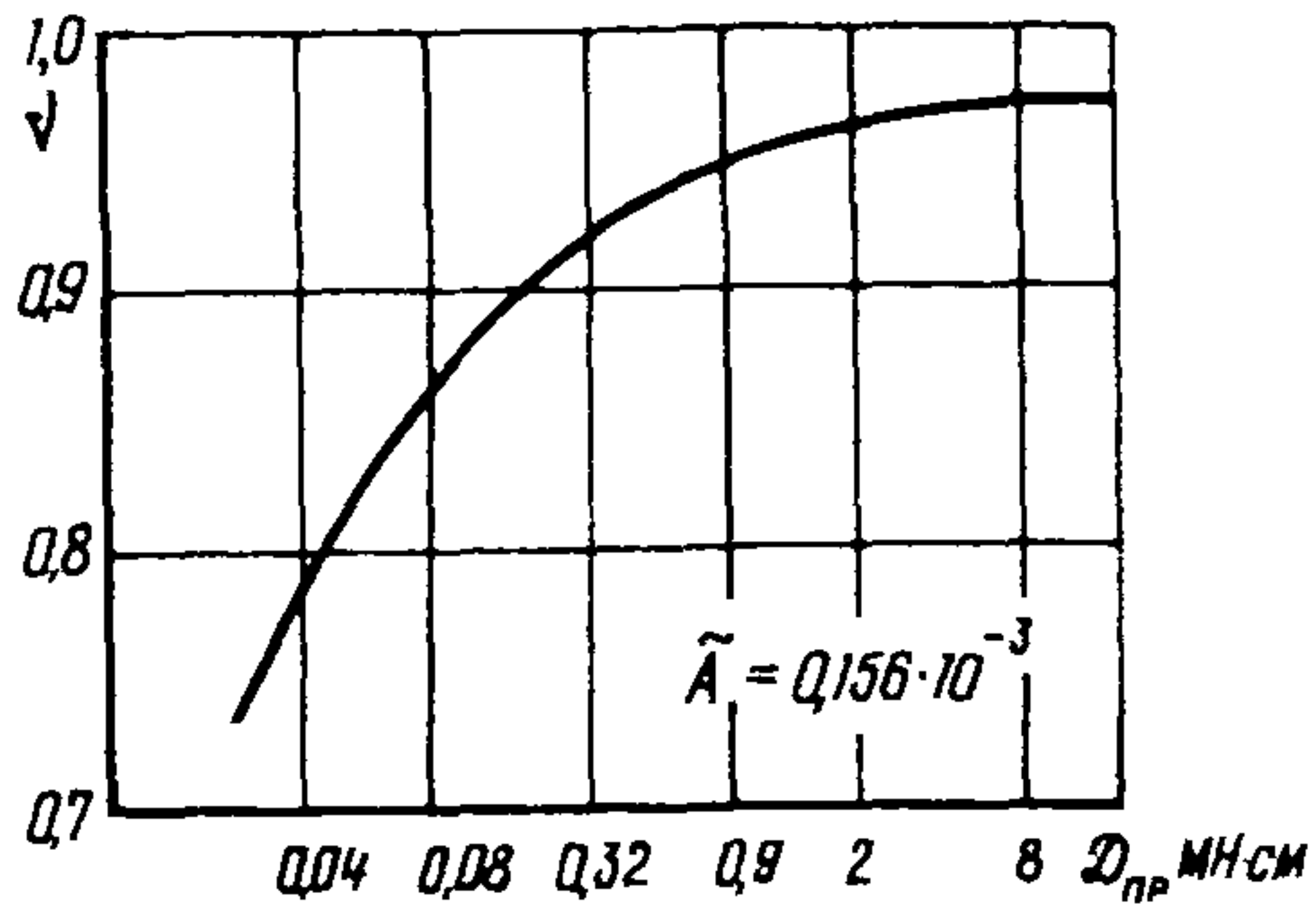


Рис.13. Зависимость параметра $\nu = \tilde{\omega}_* / \omega_*$ от приведенной жесткости трубы

пренебрежение связанностью форм колебания с $\Pi = 1$ и $\Pi = 2$ для труб с околопредельной длиной может привести к заметным неточностям в определении минимальной частоты трубы при больших прогибах (к ее завышению). В особенности это относится к многослойным трубам, составленным из большого числа слоев, когда снижение значения приведенной цилиндрической жесткости становится существенным.

Пример расчета 3

Исследовать влияние физических и геометрических параметров элементов трубопроводных систем на амплитудно-частотные зависимости, соответствующие нелинейным колебаниям многослойных элементов трубопроводов.

Вычисления проводились по формулам (51) и (53). По результатам вычислений построены приведенные ниже графики.

Графики на рис. 14, 16, 18 относятся к оболочкам с $R/H = \infty$.

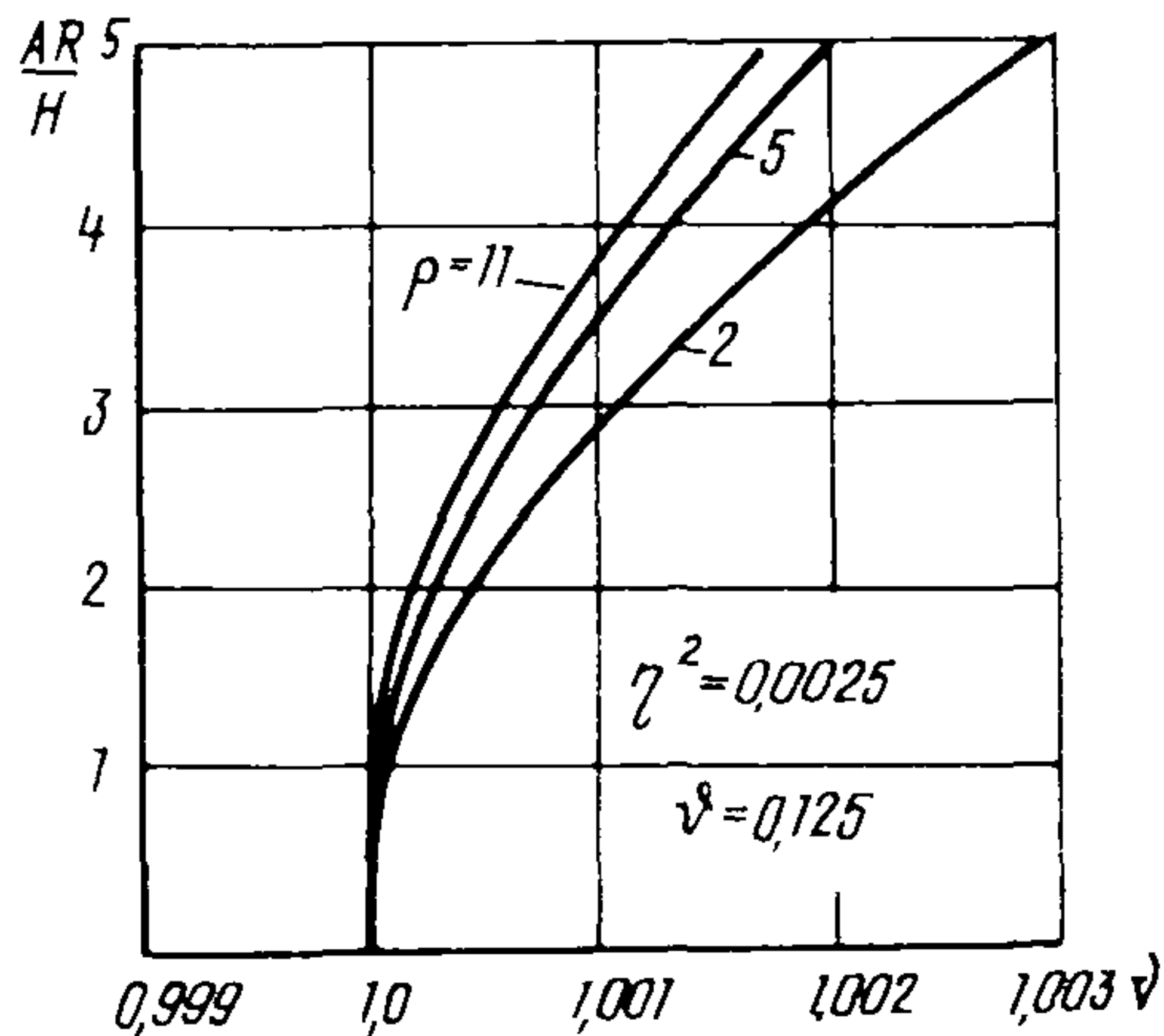


Рис. 14. Влияние числа слоев на амплитудно-частотные зависимости колебаний оболочек по форме с $\Pi = 1, \Pi = 5$

Величина L/R для оболочек, поведение которых иллюстрируется на рис. 14, 16, 19, принята равной 5. Графики на рис. 17 построены для оболочек с параметрами $R/H = 147$, $L/R = 3,64$.

При вычислении данных для графиков рис. 14, 15, 18, 19 было принято $G/E = 1 \cdot 10^{-4}$, для рис. 17 - $G/E = 5 \cdot 10^{-5}$.

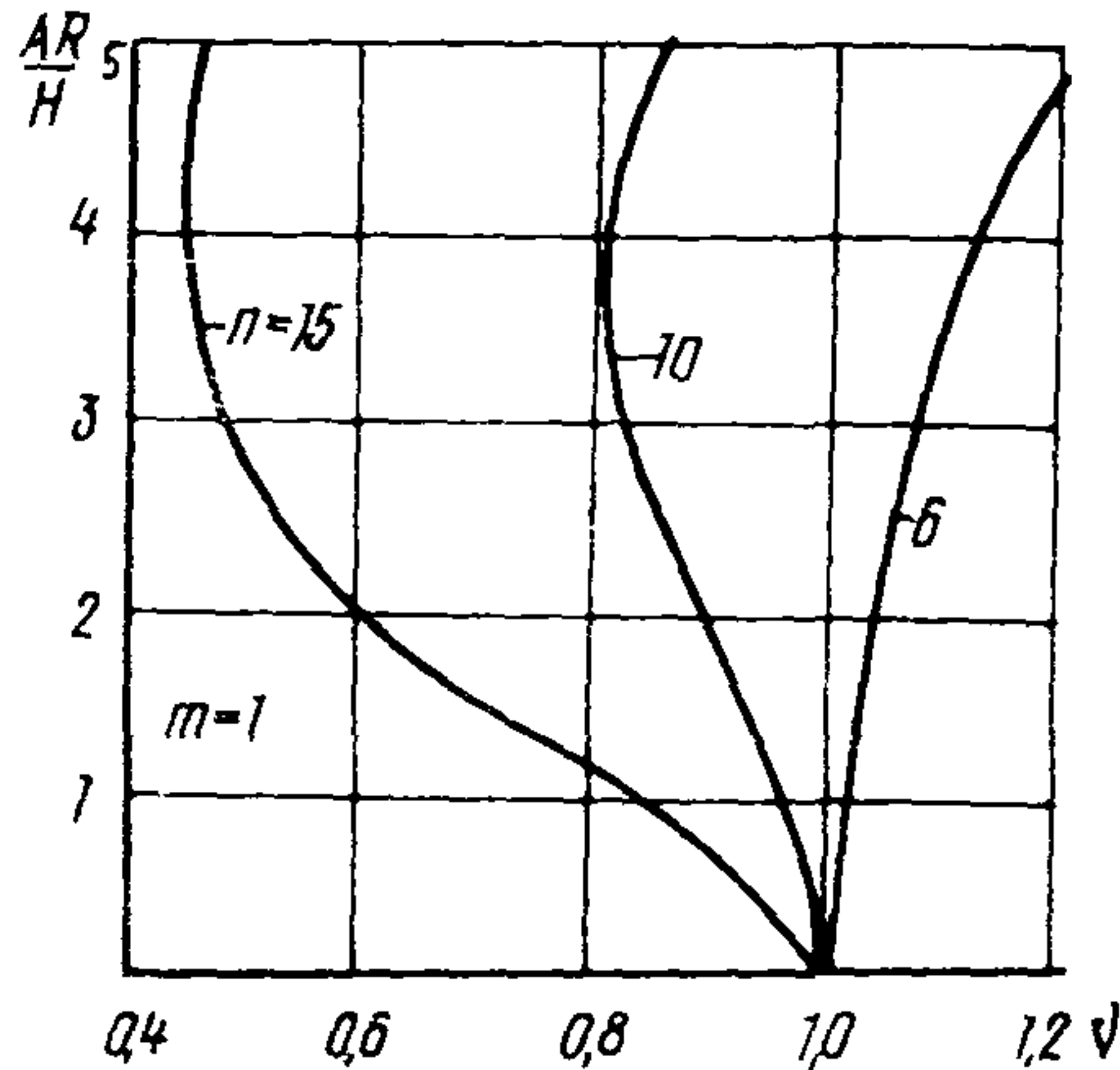


Рис. 15. Скелетные кривые для пятислойной оболочки при ее колебаниях по формам с одной полуволной в продольном направлении

На рисунках указаны значения параметров η^2 и ν^2

$$\eta^2 = n^2 H/R, \quad \nu^2 = \lambda/n.$$

Графики рис. 14 демонстрируют влияние числа слоев оболочки с коэффициентом армирования $S = 0,9$ на особенности нелинейных колебаний по форме с $m = 1$, $n = 5$; как видно из рисунка, увеличение числа слоев приводит к изменению характера колебаний. При дальнейшем увеличении числа слоев нелинейная характеристика из "жесткой" превратится в "мягкую".

На рис. 15 представлены скелетные кривые для пятислойной оболочки при ее колебаниях по формам с одной полуволной в продольном направлении. Числу окружных волн $n = 6$ соответствует нелинейность "жесткого" типа, а при $n = 10$ и более она называется существенно "мягкой".

Увеличение жесткости "швов", т.е. рост параметра G/E вызывает увеличение частоты колебаний многослойной оболочки. Влияние этого параметра на нелинейность амплитудно-частотных характеристик отражено на рис.16.

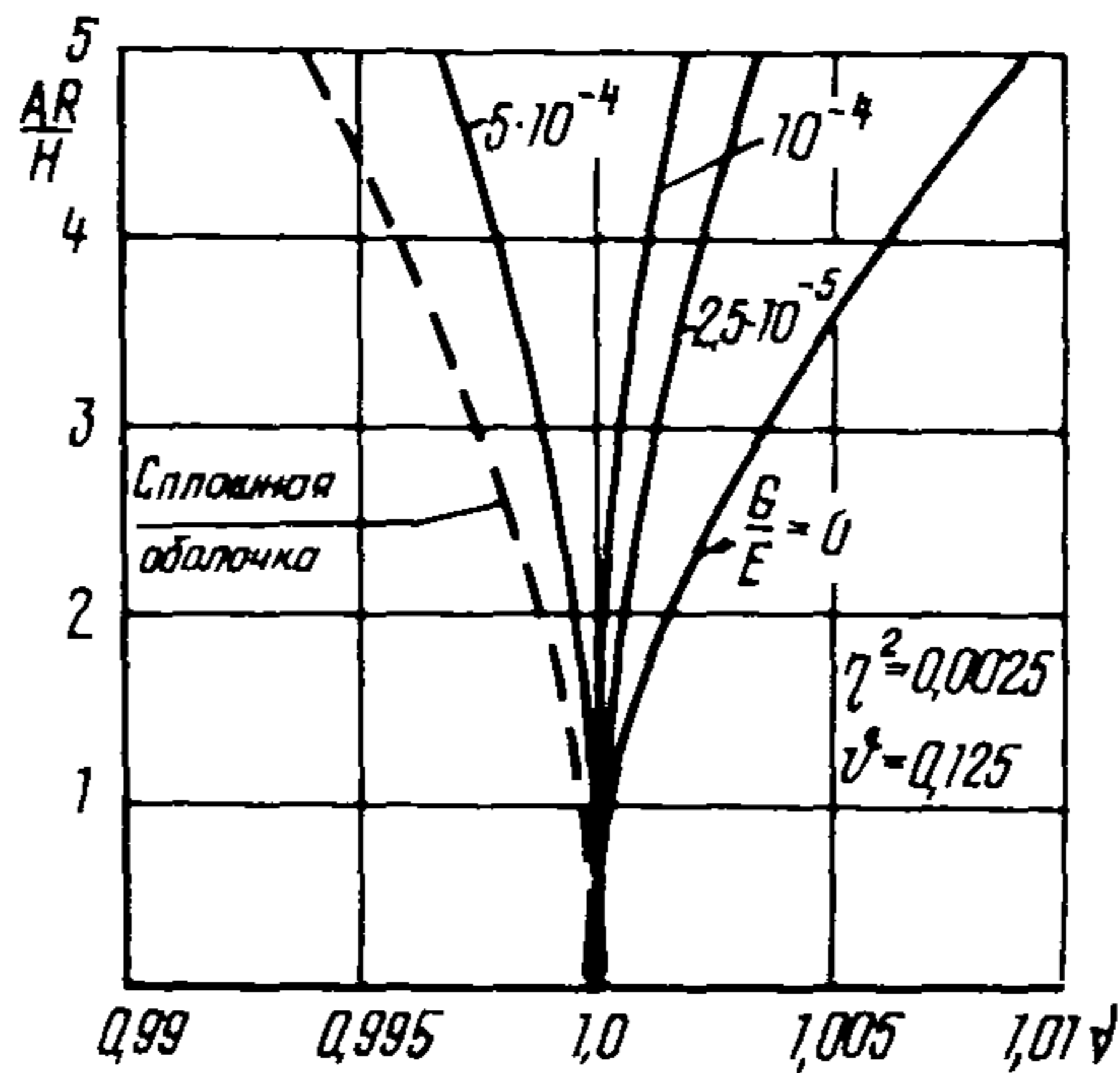


Рис.16. Влияние параметра сдвиговой жесткости на амплитудно-частотные зависимости

Наибольшая нелинейность "жесткого" типа соответствует многослойной оболочке, лишенной связей сдвига между слоями. По мере возрастания сдвиговой жесткости G нелинейность вначале уменьшается, затем меняет характер на "мягкий" и при дальнейшем увеличении усиливается в "мягкую" сторону. Скелетная кривая приближается к зависимости, полученной для сплошной оболочки.

Влияние коэффициента S на колебания пятислойной оболочки по форме $M = I$, $N = 5$ иллюстрируется графиками на рис.17. Снижение коэффициента S приводит к перемещению скелетной кривой вправо. Это вполне согласуется с графиками рис.16: уменьшение как G , так и S приводит к одному и тому же результату - росту податливости "шва", т.е. влияние этих параметров на нелинейное поведение многослойной оболочки должно быть количественно одинаковым.

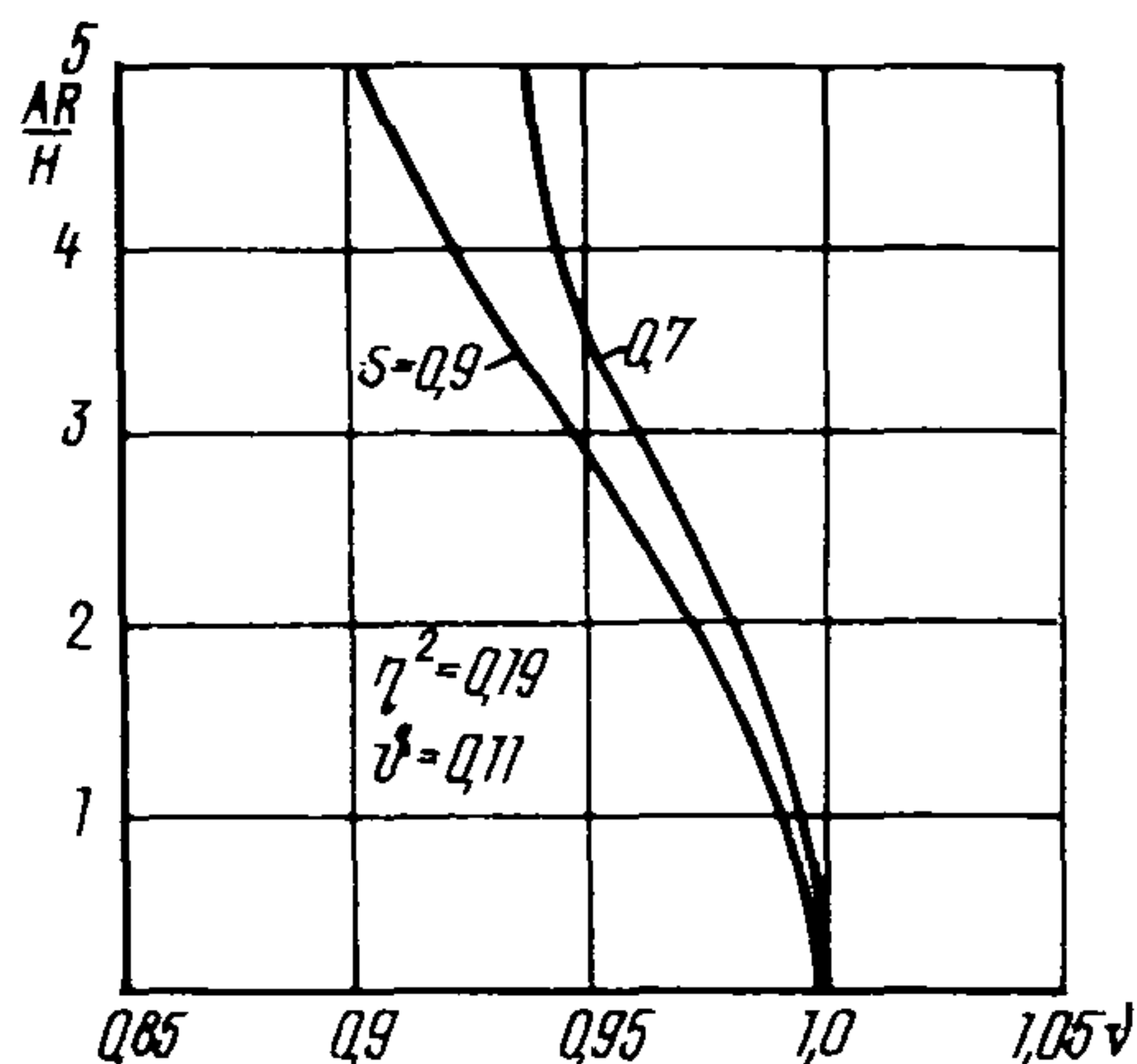


Рис.17. Влияние коэффициента S на колебания
 пятислойной оболочки по форме $\mathcal{M} = \text{I}$,
 $\mathcal{L} = 5$

На рис.18 приведены амплитудно-частотные характеристики колебаний оболочки различной длины. Формы волнообразования (значения \mathcal{M} и \mathcal{L}) отвечают минимальным частотам малых колебаний, найденным из рассмотрения спектра частот линейных колебаний многослойной оболочки. Графики относятся к пятислойным оболочкам со значениями параметра $L/R = 2, 5, 10$. Соответствующие параметры волнообразования оказались равными $\mathcal{L} = 3, 5, 8$. Нелинейный эффект оказался тем существенней, чем короче оболочка. Влияние относительной толщины R/H отражают кривые, показанные на рис.19. Оба графика, относящиеся к $R/H = 100, 500$, построены для формы $\mathcal{M} = \text{I}$, $\mathcal{L} = 5$. Чем меньше R/H (т.е. чем выше относительная толщина оболочки), тем существенней нелинейность "мягкого" типа. При больших значениях R/H скелетная кривая отражает "жесткий" режим колебаний с усиливающейся нелинейностью этого типа по мере дальнейшего возрастания относительной толщины оболочки.

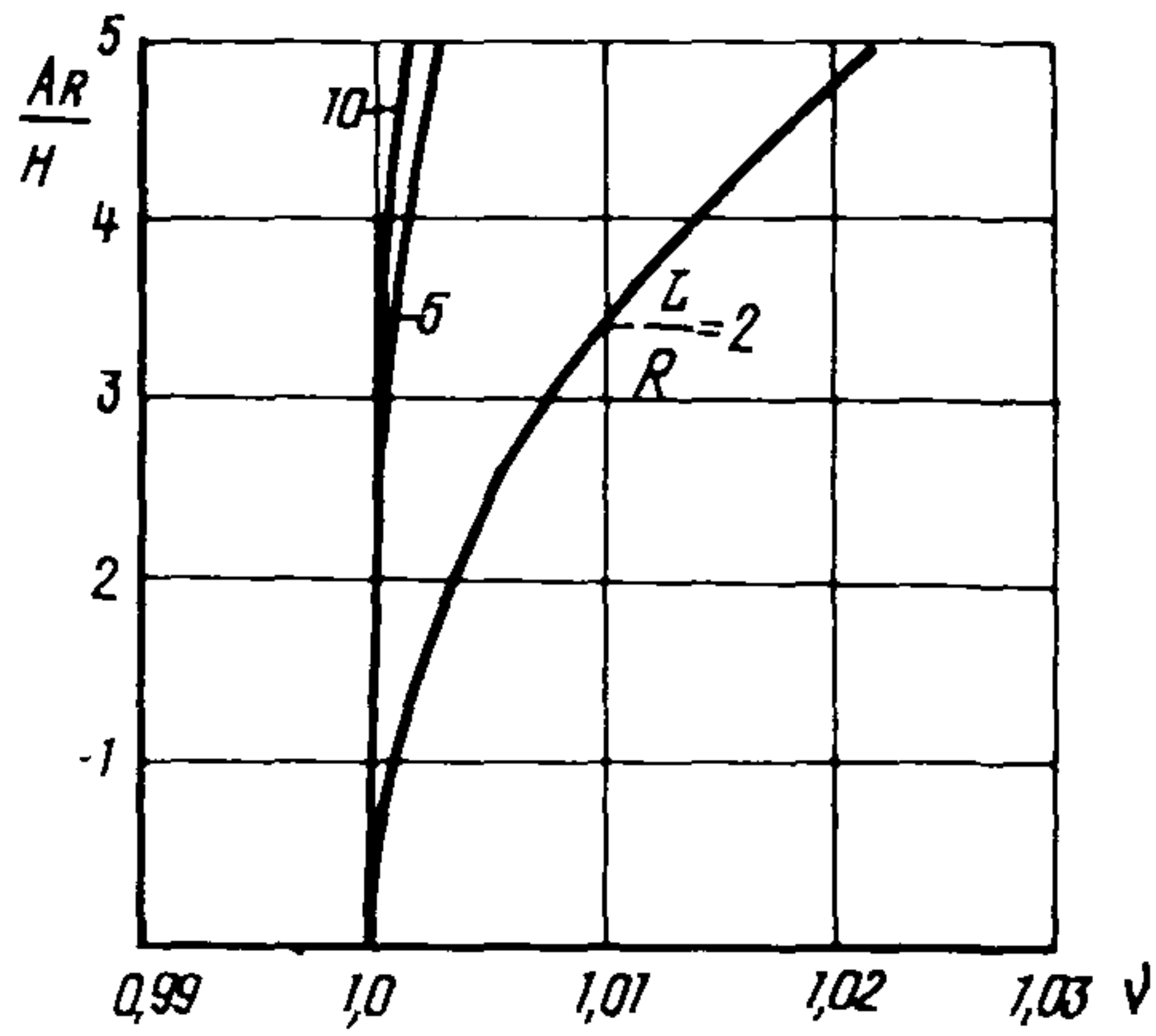


Рис.18. Амплитудно-частотные характеристики колебаний оболочки различной длины

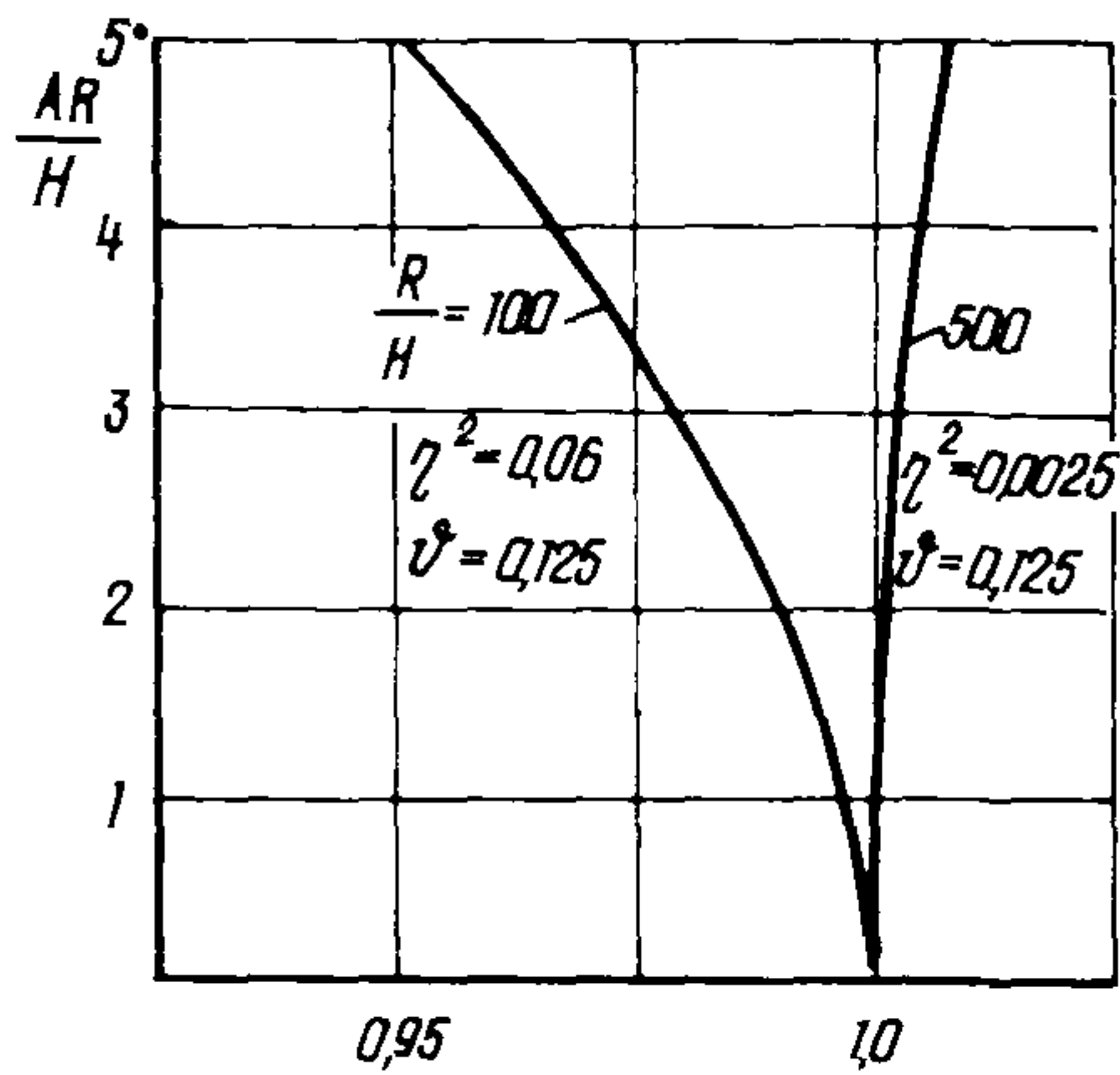


Рис.19. Скелетные кривые

Примеры вычисления частот собственных колебаний при малых прогибах

RP= 500, L= 5, G= 20, A= 1, H= 0.025, H= 0.4, R0= 0.00, J79P, MU= 1.3, E= 210000.0
 X0= -0.00009 TY0= 0.00045

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	23.282	23.304	23.308	23.475	23.623	23.813	24.033	24.312	24.616	24.961	25.339	25.752	26.193	26.666
	23.277	23.274	23.307	23.374	23.397	23.464	23.536	23.642	23.753	23.878	24.017	24.168	24.335	24.514
	4.910	1.375	2.059	2.577	3.127	4.593	5.88	6.349	7.272	8.119	9.026	9.895	10.785	11.675
	0.522	0.111	1.140	1.674	2.148	2.670	3.244	3.720	4.247	4.774	5.322	5.830	6.359	6.887
2	23.328	23.339	23.343	23.512	23.648	23.838	24.068	24.336	24.643	24.985	25.363	25.773	26.216	26.688
	23.286	23.273	23.316	23.343	23.416	23.475	23.535	23.651	23.762	23.887	24.025	24.176	24.344	24.523
	1.188	1.556	2.241	3.000	3.844	4.691	5.551	6.421	7.296	8.176	9.058	9.942	10.828	11.716
	0.807	0.908	1.316	1.758	2.238	2.739	3.250	3.768	4.288	4.811	5.335	5.860	6.385	6.912
3	23.358	23.371	23.475	23.542	23.698	23.879	24.099	4.377	24.683	25.025	25.401	25.811	26.253	26.725
	23.312	23.318	23.338	3.368	23.428	23.487	23.539	23.666	23.776	23.901	24.040	24.192	24.358	24.537
	1.714	1.961	2.537	3.252	4.033	4.849	5.688	6.548	7.402	8.278	9.144	10.021	10.908	11.782
	0.997	1.233	1.555	1.971	2.373	2.848	3.331	3.845	4.355	4.878	5.368	5.908	6.438	6.952
4	23.409	23.432	23.464	23.600	23.748	23.937	24.165	24.433	24.738	25.088	25.456	25.865	26.306	26.777
	23.321	23.339	23.351	23.389	23.441	23.508	23.580	23.666	23.797	23.921	24.060	24.212	24.378	24.557
	2.267	2.449	2.972	3.568	4.287	5.065	5.874	6.703	7.547	8.491	9.262	10.129	11.080	11.875
	1.330	1.489	1.779	2.134	2.543	2.991	3.472	3.958	4.447	4.952	5.462	5.975	6.491	6.999
5	23.485	23.506	23.578	23.676	23.823	24.011	24.239	24.506	24.810	25.158	25.525	25.934	26.373	26.843
	23.348	23.355	23.378	23.415	23.467	23.534	23.606	23.712	23.825	23.947	24.086	24.238	24.405	24.582
	2.824	2.968	3.345	3.928	4.597	5.332	6.116	6.988	7.738	8.566	9.413	10.267	11.128	11.993
	1.662	1.777	2.032	2.359	2.739	3.160	3.620	4.079	4.562	5.053	5.555	6.068	6.569	7.081

94

6	23.577	23.598	23.662	23.767	23.914	24.102	24.329	24.594	24.898	25.237	25.618	26.017	26.456	26.924
	23.388	23.388	23.410	23.448	23.508	23.567	23.648	23.744	23.855	23.979	24.117	24.269	24.434	24.613
	3.383	3.583	3.848	4.341	4.954	5.641	6.379	7.151	7.949	8.764	9.594	10.433	11.282	12.136
	1.993	2.083	2.383	2.682	2.956	3.352	3.779	4.238	4.697	5.177	5.666	6.161	6.663	7.168
7	23.686	23.707	23.778	23.875	24.021	24.208	24.434	24.699	25.008	25.338	25.718	26.116	26.552	27.019
	23.419	23.426	23.449	23.486	23.538	23.605	23.686	23.782	23.892	24.016	24.154	24.306	24.471	24.649
	3.943	4.046	4.338	4.785	5.347	5.989	6.689	7.429	8.208	9.033	9.883	10.627	11.461	12.383
	2.327	2.399	2.598	2.861	3.198	3.562	3.968	4.408	4.851	5.317	5.794	6.279	6.771	7.269
8	23.818	23.831	23.894	23.999	24.144	24.330	24.555	24.818	25.119	25.455	25.825	26.229	26.664	27.128
	23.463	23.478	23.493	23.530	23.582	23.649	23.730	23.826	23.936	24.059	24.197	24.349	24.513	24.691
	4.584	4.594	4.852	5.254	5.769	6.368	7.038	7.738	8.481	9.258	10.048	10.846	11.664	12.493
	2.668	2.728	2.887	3.133	3.438	3.789	4.174	4.587	5.022	5.473	5.937	6.412	6.895	7.384
9	23.951	23.972	24.034	24.138	24.283	24.467	24.691	24.953	25.252	25.586	25.955	26.356	26.789	27.252
	23.513	23.528	23.543	23.580	23.632	23.698	23.779	23.875	23.985	24.108	24.246	24.397	24.561	24.739
	5.065	5.145	5.376	5.748	6.214	6.774	7.399	8.075	8.789	9.534	10.302	11.089	11.891	12.705
	2.992	3.043	3.192	3.416	3.699	4.029	4.395	4.798	5.208	5.644	6.096	6.559	7.031	7.512
10	24.107	24.128	24.198	24.293	24.437	24.620	24.843	25.103	25.408	25.732	26.099	26.498	26.929	27.389
	23.569	23.576	23.598	23.635	23.687	23.754	23.834	23.930	24.039	24.163	24.300	24.451	24.615	24.792
	5.626	5.698	5.987	6.248	6.677	7.208	7.791	8.436	9.122	9.842	10.588	11.355	12.139	12.938
	3.325	3.371	3.583	3.788	3.971	4.288	4.627	5.005	5.407	5.829	6.267	6.719	7.181	7.651
11	24.278	24.299	24.361	24.463	24.606	24.788	25.009	25.267	25.563	25.893	26.257	26.654	27.082	27.540
	23.638	23.638	23.660	23.697	23.748	23.815	23.895	23.990	24.099	24.223	24.359	24.510	24.674	24.850
	6.188	6.253	6.443	6.749	7.155	7.645	8.224	8.818	9.477	10.171	10.895	11.642	12.408	13.190
	3.657	3.698	3.818	4.006	4.251	4.542	4.871	5.232	5.619	6.026	6.451	6.891	7.342	7.803
12	24.465	24.485	24.546	24.648	24.790	24.970	25.198	25.447	25.748	26.088	26.430	26.824	27.250	27.704
	23.697	23.703	23.727	23.764	23.815	23.881	23.962	24.056	24.165	24.288	24.425	24.575	24.738	24.914
	6.749	6.809	6.984	7.267	7.645	8.105	8.634	9.219	9.851	10.521	11.222	11.948	12.696	13.462
	3.998	4.027	4.136	4.318	4.538	4.812	5.125	5.478	5.841	6.234	6.646	7.074	7.514	7.965

37

R = 526, L/P = 5.7, G = 222, A = 1, HM = 0.005, H = 2.01, RO = 0.00, W79P, MU = 1.30, E = 2.10, 0.0, 0
TX = -0.00218, TY = 0.69130

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	23.282	23.324	23.368	23.415	23.463	23.513	23.563	23.612	23.661	23.711	23.761	23.811	23.861	23.911
2	23.308	23.329	23.351	23.373	23.395	23.417	23.439	23.461	23.483	23.505	23.527	23.549	23.571	23.593
3	23.350	23.371	23.392	23.413	23.434	23.455	23.476	23.497	23.518	23.539	23.560	23.581	23.602	23.623
4	23.429	23.449	23.469	23.489	23.509	23.529	23.549	23.569	23.589	23.609	23.629	23.649	23.669	23.689
5	23.485	23.506	23.527	23.548	23.569	23.590	23.611	23.632	23.653	23.674	23.695	23.716	23.737	23.758
6	23.577	23.598	23.619	23.640	23.661	23.682	23.703	23.724	23.745	23.766	23.787	23.808	23.829	23.850
7	23.686	23.707	23.728	23.749	23.770	23.791	23.812	23.833	23.854	23.875	23.896	23.917	23.938	23.959
8	23.810	23.831	23.852	23.873	23.894	23.915	23.936	23.957	23.978	23.999	24.020	24.041	24.062	24.083
9	23.951	23.972	23.993	24.014	24.035	24.056	24.077	24.098	24.119	24.140	24.161	24.182	24.203	24.224
10	24.127	24.148	24.169	24.190	24.211	24.232	24.253	24.274	24.295	24.316	24.337	24.358	24.379	24.400
11	24.278	24.299	24.320	24.341	24.362	24.383	24.404	24.425	24.446	24.467	24.488	24.509	24.530	24.551
12	24.465	24.486	24.507	24.528	24.549	24.570	24.591	24.612	24.633	24.654	24.675	24.696	24.717	24.738

E

RH= 500. L/R= 5.2 G= 22. A= 1. HM= 0.005 H= 0.01 RO= 0.00000790 MU= 0.30 E= 210000.0
 TX0= 00022 TY0= 00250

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	23.282	23.304	23.368	23.475	23.623	23.813	24.043	24.312	24.618	24.961	25.339	25.750	26.193	26.666
	23.277	23.284	23.307	23.344	23.397	23.464	23.546	23.642	23.753	23.878	24.017	24.169	24.335	24.514
	0.918	1.326	2.059	2.877	3.727	4.593	5.468	6.349	7.232	8.119	9.006	9.895	10.785	11.675
	0.522	0.721	1.140	1.634	2.148	2.670	3.194	3.720	4.247	4.774	5.302	5.830	6.359	6.887
3	23.308	23.329	23.393	23.500	23.648	23.838	24.068	24.336	24.643	24.985	25.363	25.773	26.216	26.688
	23.286	23.293	23.316	23.353	23.406	23.473	23.555	23.651	23.762	23.887	24.025	24.178	24.344	24.523
	1.188	1.556	2.241	3.020	3.844	4.691	5.551	6.421	7.296	8.176	9.058	9.942	10.828	11.716
	0.807	0.998	1.326	1.758	2.238	2.739	3.250	3.768	4.288	4.811	5.335	5.860	6.385	6.912
4	23.356	23.371	23.435	23.542	23.690	23.879	24.109	24.377	24.683	25.025	25.401	25.811	26.253	26.725
	23.320	23.328	23.350	23.388	23.428	23.487	23.569	23.666	23.776	23.901	24.040	24.192	24.358	24.537
	1.714	1.961	2.537	3.252	4.033	4.849	5.688	6.548	7.402	8.270	9.144	10.021	10.900	11.782
	0.997	1.273	1.545	1.971	2.373	2.848	3.341	3.845	4.355	4.870	5.388	5.908	6.430	6.952
5	23.409	23.430	23.494	23.600	23.748	23.937	24.166	24.433	24.738	25.080	25.456	25.865	26.306	26.777
	23.321	23.329	23.351	23.389	23.441	23.508	23.590	23.686	23.797	23.921	24.060	24.212	24.378	24.557
	2.267	2.449	2.922	3.560	4.287	5.065	5.874	6.703	7.547	8.401	9.262	10.129	11.000	11.875
	1.330	1.489	1.779	2.134	2.543	2.991	3.462	3.950	4.447	4.952	5.462	5.975	6.491	7.009
6	23.485	23.506	23.570	23.676	23.823	24.011	24.239	24.506	24.810	25.150	25.525	25.934	26.373	26.843
	23.348	23.355	23.378	23.415	23.467	23.534	23.616	23.712	23.823	23.947	24.086	24.238	24.403	24.582
	2.824	2.968	3.363	3.928	4.597	5.331	6.106	6.908	7.730	8.566	9.413	10.267	11.128	11.993
	1.662	1.777	2.032	2.359	2.739	3.160	3.610	4.079	4.562	5.055	5.555	6.060	6.569	7.081
7	23.577	23.598	23.662	23.767	23.914	24.102	24.330	24.594	24.898	25.237	25.610	26.017	26.456	26.924
	23.380	23.388	23.410	23.448	23.500	23.567	23.648	23.744	23.855	23.979	24.117	24.269	24.434	24.613
	3.383	3.515	3.800	4.341	4.954	5.641	6.379	7.151	7.949	8.764	9.594	10.433	11.282	12.136
	1.995	2.273	2.315	2.692	2.956	3.352	3.779	4.230	4.697	5.177	5.666	6.161	6.663	7.168
8	23.686	23.707	23.770	23.875	24.021	24.208	24.434	24.699	25.000	25.338	25.710	26.116	26.552	27.019
	23.419	23.426	23.449	23.485	23.538	23.605	23.686	23.782	23.892	24.016	24.154	24.306	24.471	24.649
	3.943	4.266	4.378	4.785	5.347	5.989	6.699	7.429	8.200	9.033	9.803	10.627	11.461	12.303
	2.327	2.599	2.590	2.861	3.190	3.562	3.968	4.400	4.851	5.317	5.794	6.279	6.771	7.269
9	23.810	23.831	23.894	23.999	24.144	24.330	24.555	24.818	25.119	25.455	25.825	26.229	26.664	27.128
	23.463	23.470	23.493	23.530	23.582	23.649	23.730	23.826	23.936	24.059	24.197	24.349	24.513	24.691
	4.584	4.894	4.822	5.244	5.769	6.368	7.030	7.738	8.481	9.250	10.040	10.846	11.664	12.493
	2.660	2.721	2.887	3.133	3.438	3.789	4.174	4.587	5.022	5.473	5.937	6.412	6.895	7.384
10	23.951	23.972	24.034	24.138	24.283	24.467	24.691	24.953	25.252	25.586	25.955	26.356	26.789	27.252
	23.513	23.520	23.543	23.580	23.632	23.690	23.779	23.875	23.985	24.108	24.246	24.397	24.561	24.739
	5.065	5.145	5.376	5.768	6.214	6.774	7.399	8.075	8.789	9.534	10.302	11.089	11.891	12.705
	2.992	3.045	3.192	3.406	3.699	4.029	4.395	4.790	5.208	5.644	6.096	6.559	7.031	7.512
11	24.107	24.128	24.190	24.293	24.437	24.620	24.843	25.103	25.400	25.732	26.099	26.498	26.929	27.389
	23.569	23.576	23.598	23.635	23.687	23.754	23.834	23.930	24.039	24.163	24.300	24.451	24.615	24.792
	5.626	5.696	5.917	6.240	6.677	7.200	7.791	8.436	9.122	9.842	10.588	11.355	12.139	12.938
	3.325	3.371	3.523	3.768	3.971	4.280	4.607	5.005	5.407	5.829	6.267	6.719	7.181	7.651
12	24.270	24.291	24.351	24.453	24.606	24.788	25.009	25.267	25.563	25.893	26.257	26.654	27.082	27.540
	23.630	23.638	23.660	23.697	23.748	23.815	23.895	23.990	24.099	24.223	24.359	24.510	24.674	24.850
	6.188	6.273	6.443	6.749	7.155	7.645	8.244	8.810	9.477	10.171	10.895	11.642	12.408	13.190
	3.657	3.698	3.858	4.066	4.251	4.542	4.871	5.232	5.619	6.026	6.451	6.891	7.342	7.803
13	24.405	24.425	24.485	24.588	24.740	24.920	25.138	25.394	25.688	26.020	26.388	26.792	27.230	27.694
	23.697	23.704	23.726	23.763	23.815	23.881	23.972	24.076	24.195	24.328	24.475	24.637	24.813	24.994
	6.749	6.839	6.984	7.267	7.645	8.105	8.634	9.219	9.851	10.521	11.222	11.948	12.696	13.462
	3.992	4.027	4.170	4.338	4.538	4.812	5.125	5.470	5.841	6.234	6.646	7.074	7.514	7.965

14

RH= 502. L/R= 5.0 G 202. A= 3. HM= 0.0050 H= 0.01 RO= 0.00004797 MU= 0.30 E= 2100000.0
TXD=-.00056 TYD=0.00540

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	28.052:	28.064:	28.123:	28.212:	28.333:	28.494:	28.686:	28.912:	29.170:	29.460:	29.781:	30.132:	30.511:	30.918:
	28.047:	28.053:	28.072:	28.103:	28.147:	28.203:	28.271:	28.351:	28.444:	28.548:	28.664:	28.792:	28.932:	29.082:
	0.875:	1.264:	1.964:	2.743:	3.554:	4.380:	5.214:	6.053:	6.896:	7.741:	8.587:	9.435:	10.283:	11.132:
	0.498:	0.688:	1.087:	1.558:	2.048:	2.545:	3.045:	3.547:	4.049:	4.552:	5.056:	5.559:	6.063:	6.567:
2	28.073:	28.091:	28.144:	28.233:	28.356:	28.515:	28.707:	28.932:	29.191:	29.480:	29.801:	30.151:	30.530:	30.937:
	28.054:	28.061:	28.079:	28.111:	28.154:	28.210:	28.278:	28.358:	28.451:	28.555:	28.671:	28.799:	28.939:	29.090:
	1.133:	1.423:	2.136:	2.880:	3.665:	4.472:	5.293:	6.122:	6.957:	7.795:	8.636:	9.480:	10.324:	11.170:
	0.769:	0.952:	1.264:	1.676:	2.134:	2.611:	3.099:	3.592:	4.089:	4.587:	5.086:	5.587:	6.088:	6.590:
3	28.108:	28.126:	28.179:	28.268:	28.391:	28.549:	28.741:	28.967:	29.224:	29.514:	29.834:	30.184:	30.563:	30.969:
	28.067:	28.073:	28.092:	28.123:	28.166:	28.222:	28.290:	28.371:	28.463:	28.567:	28.683:	28.811:	28.951:	29.101:
	1.634:	1.874:	2.419:	3.191:	3.845:	4.624:	5.423:	6.236:	7.057:	7.885:	8.718:	9.554:	10.393:	11.234:
	0.951:	1.175:	1.473:	1.841:	2.263:	2.716:	3.186:	3.666:	4.153:	4.644:	5.137:	5.633:	6.130:	6.629:
4	28.157:	28.175:	28.228:	28.316:	28.440:	28.598:	28.789:	29.014:	29.272:	29.561:	29.880:	30.230:	30.608:	31.014:
	28.084:	28.090:	28.109:	28.140:	28.184:	28.239:	28.307:	28.388:	28.480:	28.584:	28.700:	28.820:	28.947:	29.110:
	2.161:	2.373:	2.786:	3.393:	4.088:	4.829:	5.600:	6.391:	7.196:	8.018:	8.831:	9.658:	10.488:	11.322:
	1.268:	1.479:	1.696:	2.035:	2.425:	2.851:	3.301:	3.766:	4.240:	4.722:	5.208:	5.697:	6.189:	6.683:
5	28.220:	28.238:	28.291:	28.379:	28.502:	28.660:	28.851:	29.075:	29.332:	29.621:	29.940:	30.280:	30.666:	31.071:
	28.106:	28.112:	28.131:	28.162:	28.206:	28.261:	28.329:	28.410:	28.502:	28.606:	28.722:	28.850:	28.989:	29.139:
	2.693:	2.870:	3.27:	3.745:	4.383:	5.083:	5.821:	6.587:	7.370:	8.168:	8.975:	9.787:	10.610:	11.435:
	1.585:	1.694:	1.937:	2.249:	2.612:	3.013:	3.442:	3.889:	4.350:	4.819:	5.296:	5.778:	6.263:	6.752:
6	28.297:	28.315:	28.367:	28.455:	28.578:	28.735:	28.926:	29.150:	29.406:	29.694:	30.012:	30.360:	30.737:	31.141:
	28.133:	28.139:	28.158:	28.189:	28.232:	28.280:	28.336:	28.436:	28.528:	28.633:	28.748:	28.876:	29.015:	29.165:
	3.226:	3.340:	3.661:	4.129:	4.723:	5.379:	6.082:	6.819:	7.579:	8.354:	9.147:	9.948:	10.757:	11.571:
	1.902:	1.980:	2.196:	2.481:	2.818:	3.196:	3.603:	4.033:	4.479:	4.936:	5.402:	5.875:	6.353:	6.834:
7	28.387:	28.405:	28.458:	28.546:	28.668:	28.824:	29.015:	29.238:	29.493:	29.780:	30.098:	30.445:	30.820:	31.223:
	28.165:	28.171:	28.190:	28.221:	28.264:	28.320:	28.388:	28.468:	28.560:	28.664:	28.780:	28.907:	29.046:	29.196:
	3.768:	3.850:	4.137:	4.563:	5.098:	5.710:	6.377:	7.083:	7.818:	8.575:	9.347:	10.132:	10.927:	11.731:
	2.219:	2.287:	2.469:	2.728:	3.041:	3.397:	3.784:	4.193:	4.625:	5.069:	5.524:	5.987:	6.456:	6.931:
8	28.492:	28.509:	28.562:	28.649:	28.771:	28.927:	29.117:	29.339:	29.594:	29.879:	30.196:	30.542:	30.916:	31.318:
	28.202:	28.208:	28.227:	28.258:	28.301:	28.356:	28.424:	28.504:	28.596:	28.700:	28.816:	28.943:	29.082:	29.232:
	4.293:	4.380:	4.626:	5.018:	5.500:	6.072:	6.703:	7.378:	8.086:	8.820:	9.573:	10.341:	11.121:	11.912:
	2.536:	2.594:	2.753:	2.988:	3.278:	3.612:	3.988:	4.374:	4.788:	5.218:	5.661:	6.114:	6.574:	7.040:
9	28.600:	28.617:	28.679:	28.766:	28.887:	29.043:	29.232:	29.453:	29.707:	29.992:	30.307:	30.651:	31.024:	31.425:
	28.243:	28.249:	28.268:	28.299:	28.342:	28.396:	28.466:	28.545:	28.637:	28.741:	28.856:	28.983:	29.122:	29.272:
	4.829:	4.915:	5.126:	5.473:	5.925:	6.458:	7.055:	7.699:	8.380:	9.090:	9.823:	10.573:	11.337:	12.114:
	2.853:	2.923:	3.044:	3.257:	3.527:	3.841:	4.190:	4.567:	4.965:	5.382:	5.812:	6.254:	6.704:	7.162:
10	28.740:	28.757:	28.809:	28.896:	29.017:	29.172:	29.360:	29.580:	29.833:	30.116:	30.430:	30.773:	31.145:	31.544:
	28.292:	28.298:	28.315:	28.345:	28.389:	28.444:	28.512:	28.591:	28.683:	28.787:	28.902:	29.029:	29.167:	29.317:
	5.362:	5.473:	5.632:	5.949:	6.367:	6.865:	7.429:	8.043:	8.698:	9.384:	10.095:	10.826:	11.574:	12.336:
	3.171:	3.244:	3.340:	3.535:	3.786:	4.081:	4.412:	4.772:	5.155:	5.558:	5.976:	6.400:	6.847:	7.295:
11	28.884:	28.901:	28.953:	29.039:	29.160:	29.313:	29.501:	29.720:	29.971:	30.254:	30.566:	30.908:	31.278:	31.675:
	28.341:	28.347:	28.366:	28.397:	28.440:	28.495:	28.563:	28.642:	28.734:	28.837:	28.952:	29.079:	29.217:	29.366:
	5.900:	5.962:	6.144:	6.475:	6.822:	7.290:	7.822:	8.408:	9.036:	9.698:	10.388:	11.100:	11.831:	12.577:
	3.487:	3.526:	3.640:	3.820:	4.053:	4.331:	4.645:	4.989:	5.357:	5.746:	6.151:	6.570:	7.004:	7.440:
12	29.041:	29.058:	29.109:	29.195:	29.315:	29.468:	29.654:	29.872:	30.123:	30.403:	30.714:	31.054:	31.423:	31.818:
	28.397:	28.403:	28.422:	28.453:	28.496:	28.551:	28.618:	28.697:	28.789:	28.892:	29.007:	29.133:	29.271:	29.420:
	6.435:	6.492:	6.659:	6.999:	7.289:	7.728:	8.232:	8.790:	9.392:	10.031:	10.699:	11.392:	12.105:	12.835:
	3.804:	3.840:	3.944:	4.109:	4.327:	4.588:	4.886:	5.215:	5.569:	5.944:	6.337:	6.745:	7.165:	7.595:

RM= 500. L/P= 5.0 G= 200. A= 4. HM= 0.0030 H= 0.01 RO= 0.00000790 MU= 0.30 E= 2120000.0
 TX=0.0 TY=0.00333

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	29.150	29.167	29.219	29.304	29.423	29.576	29.771	29.979	30.220	30.508	30.818	31.157	31.524	31.918
	29.146	29.152	29.170	29.200	29.242	29.295	29.371	29.438	29.527	29.628	29.740	29.863	29.998	30.143
	0.868	1.263	1.946	2.718	3.522	4.340	5.177	5.999	6.834	7.671	8.510	9.352	10.191	11.032
	0.493	0.672	1.077	1.544	2.030	2.521	3.018	3.515	4.013	4.511	5.010	5.509	6.008	6.508
	0.314	0.158	0.065	0.035	0.026	0.027	0.032	0.039	0.047	0.056	0.065	0.075	0.086	0.097
2	29.170	29.188	29.239	29.324	29.443	29.596	29.791	29.999	30.240	30.527	30.837	31.176	31.543	31.937
	29.153	29.159	29.177	29.207	29.249	29.302	29.368	29.445	29.534	29.635	29.747	29.870	30.005	30.150
	1.123	1.478	2.117	2.854	3.632	4.432	5.276	6.067	6.894	7.725	8.559	9.395	10.232	11.070
	0.763	0.943	1.253	1.661	2.114	2.588	3.071	3.560	4.052	4.546	5.041	5.537	6.034	6.531
	0.628	0.388	0.233	0.144	0.073	0.053	0.046	0.246	0.051	0.058	0.066	0.076	0.087	0.098
3	29.204	29.221	29.273	29.358	29.477	29.629	29.824	30.032	30.280	30.568	30.869	31.208	31.574	31.967
	29.165	29.171	29.189	29.219	29.260	29.314	29.390	29.457	29.546	29.647	29.759	29.882	30.016	30.162
	1.620	1.853	2.377	3.273	4.381	5.582	6.874	8.257	9.734	11.305	12.970	14.730	16.585	18.535
	0.942	1.165	1.459	1.824	2.243	2.691	3.157	3.633	4.115	4.602	5.091	5.583	6.075	6.569
	0.793	0.561	0.346	0.216	0.143	0.101	0.078	0.067	0.064	0.066	0.071	0.080	0.089	0.100
4	29.251	29.269	29.320	29.405	29.524	29.676	29.871	30.117	30.415	30.763	31.161	31.618	32.135	32.711
	29.181	29.187	29.205	29.235	29.277	29.331	29.406	29.474	29.563	29.663	29.775	29.898	30.032	30.178
	2.142	2.314	2.761	3.364	4.051	4.786	5.570	6.334	7.131	7.938	8.752	9.577	10.394	11.221
	1.257	1.407	1.681	2.016	2.403	2.826	3.271	3.732	4.202	4.679	5.161	5.646	6.133	6.623
	0.800	0.661	0.464	0.318	0.222	0.161	0.113	0.100	0.087	0.082	0.082	0.087	0.094	0.104
5	29.312	29.329	29.380	29.465	29.584	29.736	29.931	30.177	30.475	30.823	31.221	31.678	32.195	32.771
	29.203	29.208	29.226	29.256	29.298	29.352	29.417	29.495	29.584	29.684	29.796	29.919	30.053	30.198
	2.668	2.805	3.178	3.712	4.344	5.037	5.769	6.520	7.294	8.094	8.919	9.762	10.615	11.432
	1.571	1.679	1.920	2.229	2.588	2.986	3.411	3.854	4.311	4.776	5.249	5.720	6.207	6.691
	0.802	0.714	0.551	0.407	0.300	0.225	0.174	0.140	0.118	0.105	0.099	0.099	0.103	0.110
6	29.386	29.403	29.454	29.539	29.657	29.809	29.993	30.219	30.496	30.823	31.201	31.628	32.105	32.632
	29.229	29.234	29.252	29.282	29.324	29.378	29.443	29.520	29.609	29.710	29.821	29.940	30.078	30.223
	3.197	3.322	3.628	4.101	4.681	5.330	6.047	6.757	7.511	8.281	9.065	9.857	10.660	11.468
	1.885	1.978	2.176	2.479	2.793	3.167	3.571	3.997	4.438	4.892	5.354	5.822	6.296	6.773
	0.884	0.773	0.613	0.480	0.371	0.288	0.226	0.184	0.154	0.134	0.122	0.110	0.106	0.120
7	29.473	29.490	29.541	29.626	29.744	29.896	30.091	30.337	30.634	30.981	31.378	31.825	32.322	32.869
	29.259	29.263	29.283	29.313	29.355	29.408	29.474	29.551	29.640	29.740	29.851	29.974	30.108	30.253
	3.726	3.823	4.099	4.522	5.052	5.659	6.330	7.020	7.748	8.498	9.263	10.041	10.829	11.625
	2.159	2.277	2.447	2.693	3.014	3.366	3.730	4.158	4.584	5.024	5.475	5.933	6.398	6.869
	0.884	0.771	0.657	0.539	0.433	0.347	0.281	0.230	0.190	0.166	0.148	0.136	0.133	0.133
8	29.574	29.591	29.641	29.726	29.844	29.996	30.191	30.437	30.734	31.081	31.478	31.925	32.422	32.969
	29.359	29.363	29.383	29.413	29.455	29.508	29.574	29.651	29.740	29.840	29.951	30.074	30.208	30.353
	4.256	4.341	4.580	4.965	5.451	6.017	6.633	7.312	8.014	8.741	9.487	10.243	11.022	11.805
	2.511	2.570	2.728	2.961	3.249	3.580	3.924	4.335	4.745	5.172	5.610	6.057	6.515	6.977
	0.880	0.772	0.666	0.586	0.487	0.401	0.331	0.276	0.233	0.201	0.178	0.162	0.153	0.149
9	29.687	29.704	29.754	29.839	29.957	30.109	30.304	30.550	30.847	31.194	31.591	32.038	32.535	33.032
	29.335	29.341	29.359	29.388	29.430	29.483	29.549	29.626	29.714	29.814	29.925	30.040	30.182	30.326
	4.786	4.861	5.080	5.424	5.872	6.408	7.011	7.630	8.285	8.939	9.735	10.470	11.236	12.005
	2.827	2.877	3.016	3.228	3.496	3.807	4.152	4.526	4.921	5.333	5.760	6.197	6.644	7.098
	0.885	0.779	0.671	0.583	0.532	0.449	0.388	0.319	0.275	0.236	0.209	0.189	0.175	0.168
10	29.813	29.830	29.880	29.965	30.083	30.235	30.430	30.676	30.973	31.320	31.717	32.164	32.611	33.058
	29.379	29.383	29.403	29.433	29.475	29.528	29.593	29.670	29.758	29.858	29.969	30.092	30.225	30.369
	5.316	5.384	5.522	5.806	6.130	6.504	7.032	7.571	8.220	8.870	9.520	10.170	10.820	11.470
	3.142	3.173	3.302	3.504	3.752	4.045	4.373	4.729	5.109	5.518	5.922	6.349	6.85	7.330
	0.886	0.785	0.678	0.592	0.569	0.490	0.430	0.361	0.311	0.272	0.240	0.217	0.200	0.189
11	29.952	29.969	30.019	30.104	30.222	30.374	30.570	30.816	31.113	31.460	31.857	32.304	32.751	33.198
	29.429	29.433	29.453	29.482	29.524	29.577	29.642	29.719	29.807	29.907	30.018	30.141	30.275	30.417
	5.847	5.915	6.056	6.337	6.761	7.224	7.727	8.230	8.733	9.236	9.739	10.242	10.745	11.248
	3.456	3.475	3.608	3.765	4.017	4.292	4.593	4.944	5.339	5.694	6.078	6.511	6.957	7.373
	0.886	0.779	0.671	0.585	0.600	0.527	0.449	0.399	0.346	0.306	0.272	0.245	0.225	0.211
12	30.103	30.120	30.170	30.255	30.373	30.525	30.721	30.967	31.264	31.611	31.998	32.435	32.872	33.309
	29.483	29.487	29.507	29.536	29.578	29.631	29.696	29.773	29.861	29.960	30.071	30.194	30.328	30.469
	6.377	6.444	6.599	6.866	7.224	7.659	8.138	8.617	9.096	9.575	10.054	10.533	11.012	11.491
	3.776	3.815	3.978	4.172	4.288	4.547	4.873	5.168	5.519	5.891	6.260	6.684	7.100	7.527
	0.886	0.752	0.652	0.594	0.627	0.550	0.493	0.434	0.383	0.339	0.303	0.274	0.251	0.234

RH= 500. L/R= 5.0 Q= 200. A= 4. HM= 0.0250 H= 0.01 R0= 0.02/0790 MU= 1.3 E= 21.00000.0
 TX0=0.0 TY0=0.00670

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	29.150	29.167	29.219	29.304	29.423	29.570	29.741	29.979	30.228	30.508	30.818	31.157	31.524	31.918
	29.146	29.152	29.170	29.200	29.242	29.295	29.361	29.438	29.527	29.628	29.740	29.863	29.998	30.143
	0.868	1.253	1.946	2.718	3.522	4.340	5.177	5.999	6.834	7.671	8.518	9.352	10.191	11.032
	0.493	0.682	1.077	1.544	2.030	2.523	3.028	3.515	4.013	4.511	5.010	5.507	6.008	6.508
	0.314	0.178	0.065	0.037	0.031	0.035	0.042	0.050	0.058	0.068	0.078	0.087	0.101	0.113
2	29.170	29.188	29.239	29.324	29.443	29.596	29.781	29.999	30.248	30.527	30.827	31.176	31.543	31.937
	29.153	29.157	29.177	29.207	29.249	29.302	29.368	29.445	29.534	29.635	29.747	29.870	30.005	30.150
	1.123	1.470	2.117	2.854	3.632	4.432	5.266	6.067	6.804	7.725	8.559	9.395	10.232	11.070
	0.763	0.943	1.253	1.661	2.114	2.588	3.071	3.560	4.052	4.546	5.041	5.537	6.034	6.531
	0.628	0.338	0.203	0.115	0.075	0.057	0.043	0.055	0.062	0.070	0.080	0.090	0.101	0.113
3	29.204	29.211	29.235	29.358	29.477	29.629	29.814	30.032	30.280	30.560	30.869	31.208	31.574	31.967
	29.165	29.171	29.189	29.219	29.260	29.314	29.380	29.457	29.546	29.647	29.759	29.882	30.016	30.162
	1.620	1.853	2.397	3.073	3.811	4.582	5.384	6.180	6.994	7.815	8.640	9.469	10.308	11.133
	0.942	1.168	1.459	1.824	2.243	2.691	3.177	3.633	4.115	4.602	5.091	5.583	6.075	6.569
	0.793	0.561	0.346	0.217	0.144	0.104	0.082	0.073	0.073	0.077	0.084	0.093	0.104	0.115
4	29.251	29.269	29.310	29.405	29.524	29.676	29.861	30.078	30.326	30.625	30.914	31.252	31.618	32.011
	29.181	29.187	29.205	29.245	29.277	29.331	29.396	29.474	29.563	29.663	29.775	29.890	30.032	30.178
	2.142	2.314	2.761	3.364	4.051	4.786	5.570	6.334	7.031	7.930	8.752	9.571	10.394	11.221
	1.257	1.407	1.681	2.076	2.483	2.826	3.211	3.732	4.202	4.679	5.161	5.646	6.133	6.623
	0.800	0.661	0.464	0.318	0.223	0.163	0.126	0.104	0.093	0.091	0.093	0.099	0.108	0.118
5	29.312	29.329	29.380	29.465	29.584	29.736	29.920	30.137	30.384	30.663	30.971	31.309	31.674	32.066
	29.203	29.208	29.226	29.256	29.298	29.352	29.417	29.495	29.584	29.684	29.796	29.919	30.053	30.198
	2.668	2.805	3.178	3.712	4.344	5.037	5.769	6.520	7.304	8.094	8.894	9.702	10.515	11.332
	1.571	1.679	1.920	2.229	2.588	2.986	3.411	3.854	4.311	4.774	5.249	5.726	6.207	6.691
	0.882	0.714	0.551	0.407	0.308	0.226	0.176	0.143	0.123	0.112	0.108	0.110	0.116	0.124
6	29.388	29.403	29.454	29.539	29.657	29.809	29.993	30.209	30.456	30.734	31.041	31.376	31.742	32.134
	29.229	29.234	29.252	29.282	29.324	29.378	29.443	29.520	29.609	29.710	29.821	29.944	30.078	30.223
	3.197	3.312	3.628	4.101	4.681	5.330	6.027	6.757	7.511	8.281	9.065	9.859	10.660	11.460
	1.885	1.948	2.116	2.459	2.793	3.167	3.571	3.997	4.438	4.892	5.354	5.822	6.296	6.773
	0.804	0.703	0.613	0.481	0.371	0.289	0.229	0.187	0.158	0.139	0.129	0.126	0.127	0.133
7	29.473	29.490	29.541	29.626	29.744	29.895	30.080	30.293	30.540	30.817	31.124	31.460	31.823	32.214
	29.259	29.265	29.283	29.313	29.355	29.408	29.474	29.551	29.640	29.740	29.851	29.974	30.108	30.253
	3.726	3.873	4.099	4.522	5.052	5.659	6.370	7.020	7.740	8.490	9.263	10.041	10.829	11.623
	2.199	2.267	2.447	2.703	3.014	3.366	3.750	4.150	4.584	5.024	5.475	5.933	6.398	6.869
	0.804	0.761	0.657	0.540	0.434	0.348	0.282	0.232	0.196	0.171	0.155	0.146	0.143	0.145
8	29.574	29.591	29.641	29.725	29.843	29.993	30.176	30.391	30.637	30.913	31.219	31.554	31.916	32.305
	29.295	29.301	29.318	29.348	29.390	29.444	29.509	29.586	29.674	29.773	29.886	30.009	30.143	30.287
	4.256	4.341	4.585	4.965	5.451	6.017	6.643	7.312	8.014	8.741	9.487	10.248	11.021	11.805
	2.513	2.570	2.728	2.961	3.249	3.580	3.944	4.335	4.745	5.172	5.610	6.039	6.515	6.977
	0.605	0.772	0.689	0.586	0.487	0.401	0.332	0.277	0.236	0.205	0.183	0.169	0.162	0.160
9	29.687	29.704	29.754	29.838	29.955	30.105	30.287	30.501	30.746	31.021	31.326	31.660	32.021	32.409
	29.335	29.341	29.359	29.388	29.430	29.483	29.549	29.626	29.714	29.814	29.925	30.040	30.182	30.326
	4.786	4.861	5.080	5.424	5.872	6.400	6.991	7.630	8.305	9.009	9.735	10.478	11.236	12.005
	2.827	2.877	3.016	3.228	3.496	3.807	4.152	4.526	4.921	5.333	5.760	6.197	6.644	7.098
	0.805	0.779	0.711	0.623	0.532	0.449	0.380	0.321	0.275	0.240	0.213	0.195	0.183	0.177
10	29.813	29.830	29.880	29.964	30.080	30.229	30.411	30.624	30.868	31.142	31.446	31.778	32.138	32.525
	29.379	29.385	29.403	29.433	29.475	29.528	29.593	29.670	29.758	29.858	29.969	30.092	30.225	30.369
	5.316	5.384	5.581	5.896	6.310	6.804	7.362	7.971	8.620	9.300	10.004	10.729	11.470	12.225
	3.142	3.185	3.310	3.504	3.752	4.045	4.373	4.729	5.109	5.508	5.922	6.349	6.785	7.230
	0.806	0.785	0.720	0.652	0.569	0.491	0.421	0.362	0.315	0.274	0.244	0.222	0.206	0.197
11	29.952	29.966	30.019	30.102	30.218	30.365	30.547	30.759	31.002	31.275	31.577	31.908	32.267	32.652
	29.429	29.435	29.453	29.482	29.524	29.577	29.642	29.719	29.807	29.907	30.018	30.140	30.273	30.417
	5.847	5.926	6.238	6.737	7.261	7.824	8.422	9.055	9.711	10.395	11.098	11.820	12.564	13.333
	3.456	3.495	3.628	3.785	4.017	4.292	4.603	4.944	5.309	5.694	6.096	6.511	6.937	7.373
	0.806	0.789	0.741	0.675	0.601	0.527	0.459	0.400	0.350	0.309	0.276	0.250	0.231	0.218
12	30.103	30.120	30.169	30.252	30.368	30.516	30.695	30.908	31.148	31.420	31.721	32.050	32.407	32.791
	29.483	29.489	29.506	29.536	29.577	29.631	29.696	29.772	29.862	29.960	30.070	30.192	30.325	30.469
	6.377	6.474	6.599	6.866	7.224	7.659	8.158	8.711	9.308	9.941	10.603	11.290	12.007	12.720
	3.770	3.815	3.938	4.072	4.288	4.547	4.843	5.168	5.519	5.891	6.280	6.684	7.100	7.527
	0.806	0.792	0.752	0.694	0.627	0.558	0.494	0.435	0.385	0.342	0.306	0.278	0.256	0.241

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Свободные колебания балочного конструктивно- неоднородного трубопровода	4
3. Свободные колебания многослойных элементов трубопровода	II
приложение	24

Рекомендации

по расчету трубопроводов из многослойных
труб на динамические нагрузки

Р 451-82

Издание ВНИИСТА

Редактор А.И.Зарецкая

Корректор С.П.михайлова

Технический редактор Т.В.Берешева

Л- 76924
Печ.л. 3,0
Тираж 300 экз.

Подписано в печать 21/IV 1982
Уч.-изд.л. 3,0
Цена 30 коп.

Формат 60x84/16
Бум.л. 1,5
Заказ 26

Ротапринт ВНИИСТА

МИННЕФТЕГАЗСТРОЙ

